

Часть II

Захват фазы и частоты

Глава 7

Синхронизация периодических автоколебаний периодическим внешним воздействием

В этой главе мы опишем синхронизацию периодических автоколебаний периодической внешней силой. Основной эффект состоит в захвате фазы колебаний, в результате чего наблюдаемая частота в точности совпадает с частотой силы.

Мы начнем с описания случая малой силы. В разделе 7.1 мы используем метод возмущений, т.е. пренебрегаем изменениями амплитуды автоколебаний и сводим описание только к фазовой динамике. Этот метод приводит к простому уравнению для фазы, допускающему аналитическое исследование. Это уравнение, однако, не универсально и зависит от конкретных свойств автоколебаний. Другой аналитический подход описан в разделе 7.2; здесь мы предполагаем малой не только силу, но и амплитуду колебаний, т.е. считаем, что они слабо нелинейны. В этом случае применим метод усреднения, приводящий к универсальным уравнениям. Исторически это был первый аналитический подход к проблеме синхронизации, восходящий к работам Эпплтона [Appleton 1922], Ван-дер-Поля [van der Pol 1927], Андронова и Витта [1930a; 1930b]. Усредненные уравнения могут быть исследованы достаточно подробно, но их применимость ограничена: количественные предсказания возможны только для автоколебаний малой амплитуды вблизи точки их возникновения (точки бифуркации Хопфа).

В общем случае, когда сила не мала и/или автоколебания сильно нелинейны, мы должны обратиться к качественной теории динамических систем. Для нашей проблемы основным математическим аппаратом являются отображения кольца и окружности, мы описываем их в разделе 7.3. Этот подход дает общую картину, вплоть до перехода к хаосу; он позволяет установить границы применимости аналитических методов и служит основой для численного исследования конкретных систем.

В разделе 7.4 обсуждается синхронизация ротаторов. Эти системы описываются угловыми переменными типа фазы; свойства синхронизации ротаторов близки к свойствам синхронизации автоколебательных систем. В заключение мы опишем техническое устройство – систему фазовой автоподстройки частоты; оно служит примером автоколебаний под воздействием внешней силы.

7.1 Фазовая динамика

В этом разделе мы рассмотрим влияние слабой периодической силы на периодические автоколебания. Основная идея состоит в том, что малая сила воздействует в основном на фазу, а не на амплитуду, и поэтому процесс можно описать с помощью фазового уравнения. При его выводе мы следуем методу, разработанному Малкиным [1956] и Курамото [Kuramoto 1984]. Хотя этот метод довольно общий, получающееся фазовое уравнение оказывается очень простым и удобным для исследования. Это позволит нам аналитически вывести многие важные свойства синхронизации.

7.1.1 Пределный цикл и фаза автоколебаний

Рассмотрим M -мерную ($M \geq 2$) диссипативную автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида:¹

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M). \quad (7.1)$$

¹ Систему с внешней силой можно записать формально как автономную, если ввести дополнительную переменную, эквивалентную времени. С физической точки зрения, такая манипуляция не делает систему истинно автономной, поскольку на новую переменную «время» нельзя воздействовать.

Будем предполагать, что имеется устойчивое решение $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0(t + T_0)$ с периодом T_0 . В *фазовом пространстве* (пространстве всех переменных \mathbf{x}) этому решению отвечает изолированная замкнутая притягивающая траектория, называемая *предельным циклом* (рис. 7.1). Движение точки в фазовом пространстве по этому циклу соответствует *автоколебаниям*.² Наиболее популярным классическим примером автоколебательной системы служит уравнение Ван-дер-Поля [van der Pol 1920, 1927]

$$\ddot{x} - 2\mu\dot{x}(1 - \beta x^2) + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.2)$$

При малых μ автоколебания в этой модели квазипериодические, а при больших μ имеют релаксационный характер.

Нашей первой целью является описание движений в терминах фазы. Мы введем фазу ϕ как координату вдоль цикла, монотонно растущую по направлению движения и возрастающую на 2π при каждом обороте. Более того, мы потребуем равномерного изменения фазы во времени, т.е. она должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0, \quad (7.3)$$

² Уместно противопоставить эту ситуацию периодическим движениям в консервативной интегрируемой системе, которые обычно не изолированы и не притягивающие. При этом иногда наблюдаются определенные соотношения между частотами движений в такой системе (например, между периодами обращения планет в Солнечной системе), но мы рассматриваем эти соотношения не как синхронизацию, а как резонанс.

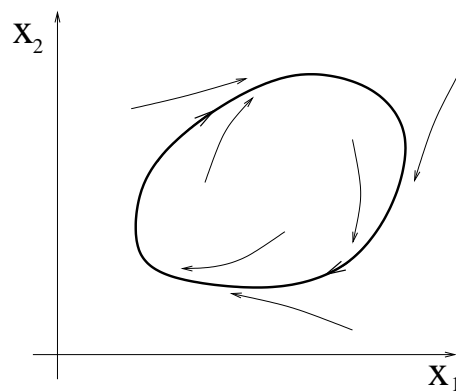


Рис. 7.1. Устойчивый предельный цикл (жирная кривая) в двумерной динамической системе. Его форма может сильно отличаться от окружности, в многомерном фазовом пространстве могут даже образовываться узлы. Соседние траектории притягиваются к циклу.

где $\omega_0 = 2\pi/T_0$ есть частота автоколебаний. В дальнейшем, когда частота колебаний будет меняться под действием силы и/или связи, нам понадобится отличать ее от частоты колебаний автономной системы. Поэтому мы будем называть ω_0 *автономной частотой*. Отметим, что равномерно вращающаяся фаза всегда существует, ее можно получить из любой неравномерно вращающейся 2π -периодической угловой переменной θ на цикле с помощью преобразования

$$\phi = \omega_0 \int_0^\theta \left[\frac{d\theta}{dt} \right]^{-1} d\theta. \quad (7.4)$$

Системные переменные \mathbf{x} , взятые на цикле, являются 2π -периодическими функциями фазы.

Из (7.3) следует очень важное свойство фазы: эта переменная нейтрально устойчива. Действительно, возмущение фазы остается постоянным, оно не растет и не убывает во времени. В терминах устойчивости траекторий это означает, что устойчивый предельный цикл имеет один нулевой ляпуновский показатель, соответствующий возмущениям вдоль цикла (другие показатели, соответствующие поперечным возмущениям, отрицательны). Этот факт отражает свойство автономных динамических систем – они инвариантны по отношению к сдвигу времени: если $\mathbf{x}(t)$ есть зависящее от времени решение, то та же самая функция времени со сдвинутым аргументом $\mathbf{x}(t + \Delta t)$ также является решением. При движении по предельному циклу сдвиг времени Δt соответствует сдвигу фазы $\Delta\phi = \omega_0 \Delta t$. На математическом языке можно сказать, что фаза устойчива, но не асимптотически устойчива.

7.1.2 Малые возмущения и изохроны

Рассмотрим теперь действие малой внешней силы на автоколебания. Вынужденные движения описываются уравнениями

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{p}(\mathbf{x}, t), \quad (7.5)$$

где сила $\varepsilon \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon \mathbf{p}(\mathbf{x}, t + T)$ имеет период T , в общем случае отличный от T_0 . Сила пропорциональна малому параметру ε ; ниже мы рассматриваем только эффекты первого порядка по ε .

Внешняя сила уводит траекторию с предельного цикла, но из-за того, что она мала, а цикл устойчив, траектория только слегка

отклоняется от исходной $\mathbf{x}_0(t)$, т.е. она лежит в малой окрестности устойчивого предельного цикла.³ Таким образом, возмущения в поперечном к циклу направлении малы.⁴ В противоположность этому, возмущения фазы могут быть большими: сила может легко двигать фазовую точку вдоль цикла. На этой качественной картине основывается идея описывать возмущенные движения только с помощью фазы, учитывая поперечные к предельному циклу отклонения с помощью метода возмущений. Для этого нужно определить фазу автономной системы (7.1) не только на предельном цикле, но и в его окрестности. Естественный и удобный способ такого определения был предложен Winfree [1980] и Guckenheimer [1975], см. также [Kuramoto 1984].

Основная идея состоит в нахождении такой фазовой переменной, которая бы вращалась равномерно в соответствии с (7.3) не только на цикле, но и вблизи него. С этой целью определим так называемые *изохроны* [Winfree 1967; Guckenheimer 1975]. Построение этих кривых в окрестности предельного цикла проиллюстрировано на рис. 7.2. Будем наблюдать нашу динамическую систему (7.1) стробоскопиче-

- ³ При релаксационных колебаниях, когда предельный цикл особенно устойчив, отклонения от цикла малы и при не очень малой амплитуде силы. Эти колебания хорошо описываются одной лишь фазовой переменной, мы займемся ими в разделе 7.3.
- ⁴ Переменные в поперечных к предельному циклу направлениях можно обобщенно называть амплитудой. В многомерном фазовом пространстве это определение, однако, не однозначно.

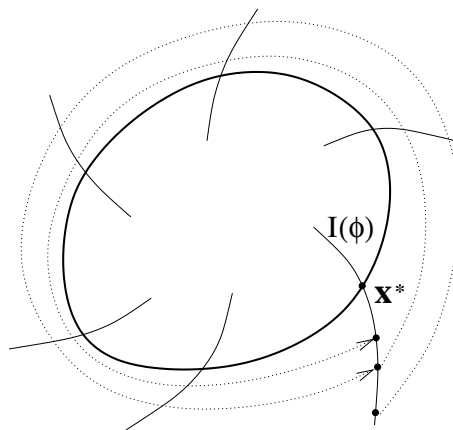


Рис. 7.2. Изохроны $I(\phi)$ в окрестности устойчивого предельного цикла. Они инвариантны при стробоскопическом (с периодом цикла T_0) отображении, траектории которого показаны пунктиром.

ски, через интервалы времени в точности равные периоду автоколебаний T_0 . Тогда из (7.1) получается отображение

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t + T_0) \equiv \Phi(\mathbf{x}).$$

Все точки на предельном цикле есть неподвижные точки этого отображения, и все соседние точки притягиваются к ним. Выберем точку на цикле \mathbf{x}^* и рассмотрим те точки в ее окрестности, которые притягиваются к ней под действием Φ . Они образуют $(M - 1)$ -мерную гиперповерхность I , называемую *изохроной*, пересекающую предельный цикл в точке \mathbf{x}^* . Гиперповерхность изохроны можно провести через любую точку на цикле. Поэтому мы можем параметризовать эти поверхности в соответствии с фазой $I(\phi)$ (рис. 7.2). Теперь можно обобщить определение фазы на окрестность предельного цикла, требуя, чтобы фаза была постоянна на каждой изохроне $I(\phi)$. Таким образом фаза определяется в окрестности предельного цикла – по крайней мере в той окрестности, в которой существуют изохроны.

Смысл названия поверхностей $I(\phi)$ очевиден: поток, задаваемый динамической системой (7.1), переводит эти поверхности друг в друга. Из этой конструкции непосредственно следует, что фазы подчиняются уравнению (7.3), поскольку изохроны вращаются с той же скоростью, что и точки на цикле. Более того, при обороте за время T_0 эти гиперповерхности остаются инвариантными. Поэтому они обладают одним интересным свойством: если мы выберем такую поверхность в качестве секущей Пуанкаре, то отображение Пуанкаре будет иметь одно и то же время возврата для всех точек на секущей. Отметим также, что изохроны хорошо определены как для устойчивого, так и для полностью неустойчивого предельных циклов (в последнем случае имеется в виду неустойчивость по всем поперечным направлениям, так что цикл становится устойчивым в обратном времени, и тогда изохроны можно определить), но они не определены для седловых циклов, имеющих как устойчивые, так и неустойчивые многообразия.

7.1.3 Пример: уравнение для комплексной амплитуды

Рассмотрим один конкретный пример системы с предельным циклом и определим фазу и изохроны. Запишем систему в комплексном виде как уравнение первого порядка для комплексной переменной A . Как мы увидим ниже в разделе 7.2, это уравнение описывает

слабонелинейные автоколебания, и A есть их комплексная амплитуда, ср. с (7.41). В различных приложениях это уравнение называют уравнением Ландау–Стюарта или моделью «лямбда–омега»:

$$\frac{dA}{dt} = (1 + i\eta)A - (1 + i\alpha)|A|^2 A. \quad (7.6)$$

Записывая это уравнение в полярных координатах $A = Re^{i\theta}$, получим легко разрешимую систему второго порядка

$$\frac{dR}{dt} = R(1 - R^2), \quad (7.7)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \eta - \alpha R^2. \quad (7.8)$$

Предельный цикл есть единичная окружность $R = 1$ и решение с произвольными начальными условиями $R_0 = R(0)$, $\theta_0 = \theta(0)$ имеет вид

$$R(t) = \left[1 + \frac{1 - R_0^2}{R_0^2} e^{-2t} \right]^{-1/2}, \quad (7.9)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + (\eta - \alpha)t - \frac{\alpha}{2} \ln(R_0^2 + (1 - R_0^2)e^{-2t}).$$

На предельном цикле угловая переменная θ вращается с постоянной скоростью $\omega_0 = \eta - \alpha$ и, следовательно, совпадает с фазой ϕ . Однако, если амплитуда не равна единице, происходит дополнительный набег фазы из-за слагаемого в (7.8), пропорционального α . Из (7.9) легко видеть, что этот дополнительный набег фазы равен $-\alpha \ln R_0$. Поэтому на всей плоскости (R, θ) фазу можно определить как

$$\phi(R, \theta) = \theta - \alpha \ln R. \quad (7.10)$$

Легко проверить, что эта фаза действительно вращается равномерно:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} - \alpha \frac{\dot{R}}{R} = \eta - \alpha.$$

Изохроны есть линии постоянной фазы ϕ , на плоскости (R, θ) они представляют собой логарифмические спирали

$$\theta - \alpha \ln R = \text{constant}.$$

При $\alpha = 0$ спирали превращаются в прямые $\theta = \phi$. На этом примере удобно обсудить свойство изохронности колебаний. С физической точки зрения, под изохронными колебаниями часто понимают такие, у которых частота не зависит от амплитуды, а под неизохронными

– колебания с зависящей от амплитуды частотой (в нашем примере амплитуда – это переменная R). Это определение, однако, не однозначно, поскольку вне предельного цикла фазу и, соответственно, амплитуду, можно определить по разному. Если мы примем введенное выше определение, основанное на изохронах, то частота будет постоянной и любой осциллятор будет изохронным. С другой стороны, частота, определенная по угловой скорости угловой переменной θ в приведенном выше примере, задается уравнением (7.8) и зависит от амплитуды. Мы предпочитаем придерживаться второго подхода и называть осциллятор (7.6) изохронным, если $\alpha = 0$, и неизохронным в противном случае. В терминах изохрон, можно называть осциллятор изохронным, если изохроны перпендикулярны к предельному циклу, и неизохронным в противном случае. Отметим, что это определение все еще неоднозначно, поскольку оно не инвариантно к заменам переменных.

7.1.4 Уравнение фазовой динамики

Определив фазу в некоторой окрестности предельного цикла, мы можем записать уравнение (7.3) в этой окрестности как

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \omega_0. \quad (7.11)$$

Поскольку фаза гладко зависит от координат \mathbf{x} , можно выразить ее производную по времени в виде

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}, \quad (7.12)$$

что вместе с (7.1) приводит к соотношению

$$\sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x}) = \omega_0.$$

Рассмотрим теперь возмущенную систему (7.5). Используя «невозмущенное» определение фазы и подставляя (7.5) в (7.12), получим

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} (f_k(\mathbf{x}) + \varepsilon p_k(\mathbf{x}, t)) = \omega_0 + \varepsilon \sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} p_k(\mathbf{x}, t). \quad (7.13)$$

Второй член в правой части мал (пропорционален ε), и отклонения \mathbf{x} от предельного цикла \mathbf{x}_0 также малы. Поэтому в первом приближении можно этими отклонениями пренебречь и вычислить правые части на предельном цикле:

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \sum_k \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_0)}{\partial x_k} p_k(\mathbf{x}_0, t). \quad (7.14)$$

Поскольку точки на предельном цикле однозначно связаны с фазой ϕ , получается замкнутое уравнение, содержащее только фазу:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon Q(\phi, t), \quad (7.15)$$

где

$$Q(\phi, t) = \sum_k \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_0(\phi))}{\partial x_k} p_k(\mathbf{x}_0(\phi), t).$$

Отметим, что Q есть 2π -периодическая функция ϕ и T -периодическая функция t .

7.1.5 Пример: неавтономное уравнение для комплексной амплитуды

В качестве примера рассмотрим вынужденные колебания осциллятора, описываемого уравнением (7.6), которое мы перепишем как систему действительных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - \eta y - (x^2 + y^2)(x - \alpha y) + \varepsilon \cos \omega t, \\ \frac{dy}{dt} &= y + \eta x - (x^2 + y^2)(y + \alpha x). \end{aligned}$$

Перепишая выражение для фазы (7.10) в виде

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} - \frac{\alpha}{2} \ln(x^2 + y^2),$$

получаем частный случай уравнения (7.15):

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \omega t = \eta - \alpha - \varepsilon(\alpha \cos \phi + \sin \phi) \cos \omega t,$$

из которого, если обозначить $\tan \phi_0 = 1/\alpha$, следует

$$\frac{d\phi}{dt} = \eta - \alpha - \varepsilon \sqrt{1 + \alpha^2} \cos(\phi - \phi_0) \cos \omega t. \quad (7.16)$$

Уравнение (7.15) служит базовым уравнением для описания динамики фазы автоколебаний в присутствии малой периодической внешней силы. Исследовать его можно различными способами. Если никаких приближений больше не делать, то мы придем к анализу, представленному ниже в разделе 7.3. Здесь же мы воспользуемся еще раз малостью параметра ε и упростим уравнение для фазы.

7.1.6 Медленная динамика фазы

В «нулевом» приближении, если пренебречь действием внешней силы (т.е. если $\varepsilon = 0$), решение уравнения (7.15) имеет вид

$$\phi = \omega_0 t + \phi_0. \quad (7.17)$$

Подставим это решение в функцию Q . Поскольку эта функция 2π -периодична по ϕ и T -периодична по t , ее можно представить в виде двойного ряда Фурье и записать

$$Q(\phi, t) = \sum_{l,k} a_{l,k} e^{ik\phi + il\omega t}, \quad (7.18)$$

где $\omega = 2\pi/T$ – частота внешней силы. Подставляя (7.17) в (7.18) получим

$$Q(\phi, t) = \sum_{l,k} a_{l,k} e^{ik\phi_0} e^{i(k\omega_0 + l\omega)t}. \quad (7.19)$$

Мы видим, что функция Q содержит как быстро осциллирующие (по сравнению с временным масштабом $1/\varepsilon$) члены, так и медленно меняющиеся. К последним относятся те, что удовлетворяют *резонансному условию*

$$k\omega_0 + l\omega \approx 0.$$

Будучи подставленными в (7.15), быстро осциллирующие члены приводят к отклонениям фазы порядка $O(\varepsilon)$, в то время как резонансные члены в ряде (7.19) могут привести к большим (хотя и медленным в силу малости параметра ε) изменениям фазы и поэтому особенно важны для динамики. Таким образом, наиболее существенные процессы выделяются, если усреднить силу (7.19), оставив только резонансные члены. Какие члены удовлетворяют условию резонанса, зависит от соотношения между частотой внешней силы ω и автономной частотой ω_0 . В простейшем случае эти две частоты просто близки друг к другу, $\omega \approx \omega_0$. Тогда резонансны только члены с $k = -l$. Суммируя их, получим новую, усредненную силу

$$\sum_{l=-k} a_{l,k} e^{ik\phi + il\omega t} = \sum_k a_{-k,k} e^{ik(\phi - \omega t)} = q(\phi - \omega t). \quad (7.20)$$

Усредненная сила q есть 2π -периодическая функция аргумента и содержит все резонансные члены. Подставляя ее в (7.15), получим

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon q(\phi - \omega t). \quad (7.21)$$

Введем новую переменную – разность фазы колебаний и фазы внешней силы:

$$\psi = \phi - \omega t. \quad (7.22)$$

Переменную ψ можно трактовать как медленную фазу во вращающейся системе отсчета. Введем также расстройку частот согласно

$$\nu = \omega - \omega_0 \quad (7.23)$$

и окончательно получим

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon q(\psi). \quad (7.24)$$

Прежде, чем перейти к анализу этого уравнения, покажем, что оно описывает и более общий случай, когда условие резонанса между частотой силы ω и автономной частотой ω_0 имеет вид

$$\omega \approx \frac{m}{n}\omega_0, \quad (7.25)$$

где m и n целые числа, не имеющие общего делителя. Легко видеть, что в этом случае резонансные члены в (7.19) содержат выражения типа $e^{i(jm\omega_0 - jn\omega)t}$. Тогда вместо (7.20) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{l=-nj, k=mj} a_{l,k} e^{i(k\phi + l\omega t)} &= \sum_j a_{-nj, mj} e^{ij(m\phi - n\omega t)} = \\ &= \hat{q}(m\phi - n\omega t), \end{aligned} \quad (7.26)$$

где $\hat{q}(\cdot)$ есть 2π -периодическая функция. Уравнение для фазы теперь принимает вид

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \hat{q}(m\phi - n\omega t). \quad (7.27)$$

Вводя разность фаз как

$$\psi = m\phi - n\omega t,$$

получим

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon m \hat{q}(\psi), \quad (7.28)$$

где расстройка равна $\nu = n\omega - m\omega_0$. Это уравнение имеет тот же вид, что и (7.24). Простейшая 2π -периодическая функция это $\sin(\cdot)$, так что простейшая форма усредненного уравнения для фазы есть

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon \sin \psi. \quad (7.29)$$

Это уравнение иногда называют уравнением Адлера [Adler 1946].

7.1.7 Медленная динамика фазы: захват фазы и область синхронизации

Займемся исследованием основного уравнения (7.24) – нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Фазовое пространство для него можно определить двумя способами: фазу ψ можно рассматривать либо на действительной оси, от $-\infty$ до ∞ , либо, используя 2π -периодичность функции q , на окружности $0 \leq \psi < 2\pi$. Поскольку эти два представления эквивалентны, мы будем в зависимости от удобства пользоваться то одним, то другим. Уравнение (7.24) зависит от двух параметров, ε и ν . В соответствии с изначальным уравнением (7.5), ε можно интерпретировать как амплитуду внешней силы. Параметр ν , согласно (7.23), есть расстройка частот, т.е. разность между автономной частотой и частотой внешней силы. При выводе (7.24) расстройка предполагалась малой, фактически порядка ε . Отметим также, что все особенности формы предельного цикла в автономной системе (7.1) и все особенности внешней силы учтены в функции $q(\psi)$.

В уравнении (7.24) возможны два типа поведения фазы ψ , они показаны на рис. 7.3. Функция $q(\psi)$ есть 2π -периодическая функция ψ и поэтому имеет на интервале $[0, 2\pi)$ максимум q_{\max} и минимум q_{\min} ; в общем случае эти экстремумы не вырождены. Поэтому, если расстройка ν лежит в интервале

$$\varepsilon q_{\min} < \nu < \varepsilon q_{\max}, \tag{7.30}$$

то существует по крайней мере одна пара неподвижных точек (7.24), т.е. пара стационарных состояний фазы ψ . Легко видеть, что одна из этих точек устойчива (асимптотически), а другая неустойчива; в общем случае может быть несколько пар устойчивых и неустойчивых

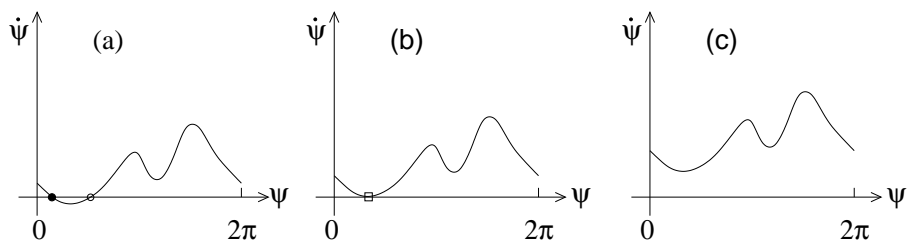


Рис. 7.3. Правая часть уравнения (7.24) внутри (а), на границе (б), и вне области синхронизации (с). Устойчивая и неустойчивая неподвижные точки обозначены символами ● и ○. На рисунке (б) показан переход к синхронизации, при котором устойчивая и неустойчивая точки сливаются, образуя полустойчивую точку (квадрат □).

точек (если функция q имеет более двух экстремумов). Поэтому при выполнении условия (7.30) система эволюционирует к одной из устойчивых неподвижных точек и остается в ней, так что вращающаяся фаза постоянна, $\psi = \psi_s$. Для исходной фазы ϕ это означает вращение с частотой внешней силы:

$$\phi = \omega t + \psi_s, \quad (7.31)$$

это как раз и есть *режим синхронизации*. Он существует внутри области (7.30) на плоскости параметров (ν, ε) , называемой *областью синхронизации* (рис. 7.4а). Часто говорят, что фаза автоколебаний ϕ следит за внешней силой ωt , и этот режим называют *захватом фазы*. Другой часто используемый термин – *захват частоты*, он означает, что частота колебаний совпадает с частотой внешней силы.

Другая ситуация наблюдается, если расстройка лежит вне интервала (7.30). Тогда производная фазы ψ по времени все время положительна (отрицательна) и частота колебаний отличается от частоты внешней силы ω . Решение уравнения (7.24) можно формально записать как

$$\int^{\psi} \frac{d\psi}{\varepsilon q(\psi) - \nu} = t,$$

оно определяет зависимость медленной фазы от времени, $\psi = \psi(t)$. Эта функция периодична с периодом T_ψ , который определяется по формуле

$$T_\psi = \left| \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\varepsilon q(\psi) - \nu} \right|. \quad (7.32)$$

Фаза ϕ вращается неравномерно,

$$\phi = \omega t + \psi(t), \quad (7.33)$$

и в общем случае зависимость переменных $\mathbf{x}(\phi)$ от времени – квазипериодическая (с двумя несоизмеримыми периодами).⁵

Важной характеристикой динамики вне области синхронизации служит средняя скорость вращения фазы, мы назовем ее *наблюдаемой частотой*. Поскольку фаза ψ испытывает приращение на $\pm 2\pi$

⁵ Любую из переменных x_i можно записать как 2π -периодическую функцию переменных $\theta_1 = \omega t$ и $\theta_2 = \Omega_\psi t$, что в случае несоизмеримых частот ω и $\Omega_\psi = 2\pi/T_\psi$ дает квазипериодическую функцию времени.

за время T_ψ , средняя частота вращений медленной фазы ψ , часто называемая *частотой биений*, равна

$$\Omega_\psi = 2\pi \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\varepsilon q(\psi) - \nu} \right)^{-1}. \quad (7.34)$$

Соответственно, наблюдаемая частота Ω исходной фазы ϕ равна

$$\langle \dot{\phi} \rangle = \Omega = \omega + \Omega_\psi.$$

(Скобки $\langle \rangle$ обозначают здесь усреднение по времени.) Частота биений есть разность между наблюдаемой частотой колебаний и частотой внешней силы.

Легко увидеть, что частота биений Ω_ψ монотонно зависит от расстройки ν . Более того, вблизи перехода к синхронизации можно оценить эту зависимость аналитически. При изменении параметра ν переход к синхронизации происходит при $\nu = \varepsilon q_{\max, \min}$, где устойчивая и неустойчивая неподвижные точки сливаются и исчезают через бифуркацию седло–узел, см. рис. 7.3. Рассмотрим для определенности переход при $\nu_{\max} = \varepsilon q_{\max}$. Если $\nu - \nu_{\max}$ мало, то выражение $|\varepsilon q(\psi) - \nu|$ очень мало в окрестности точки ψ_{\max} , так что только эта окрестность определяет значение интеграла (7.34). Раскладывая функцию $q(\psi)$ в ряд вблизи ψ_{\max} и устремляя пределы интегрирования к бесконечности, получаем корневую зависимость частоты биений (7.34)

$$\begin{aligned} |\Omega_\psi| &\approx 2\pi \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{\frac{\varepsilon}{2} q''(\psi_{\max}) \psi^2 - (\nu - \nu_{\max})} \right|^{-1} \\ &= \sqrt{\varepsilon |q''(\psi_{\max})| \cdot (\nu - \nu_{\max})} \sim \sqrt{(\nu - \nu_{\max})}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Типичная зависимость частоты биений от расстройки ν показана на рис. 7.4b.

Уместно отметить, что вблизи точки перехода динамика фазы ψ очень неоднородна по времени (рис. 7.5). Действительно, в этом режиме траектория проводит долгое время (пропорциональное $(\nu - \nu_{\max})^{-1/2}$) в окрестности точки ψ_{\max} , где правая часть (7.24) близка к нулю. Эти долгие периоды почти постоянной фазы $\psi \approx \psi_{\max}$ регулярным образом перемежаются с относительно короткими интервалами времени, на которых фаза ψ увеличивается (уменьшается) на 2π ; эти события называют *проскоками фазы*. Таким образом, вращение фазы можно представить как периодическую (с периодом T_ψ (7.32)) последовательность проскоков. Между ними осциллятор

практически синхронизован внешней силой, и его фаза почти захвачена. Во время проскока фаза осциллятора совершает один дополнительный оборот по отношению к внешней силе (или отстает от нее на один оборот). Отметим, что в нашем приближении (медленная динамика фазы ψ) длительность проскока много больше периода колебаний, хотя и много меньше интервала между ними. Переход к синхронизации выглядит как увеличение интервалов времени между проскоками согласно (7.35), пока эти интервалы не обращаются в бесконечность в точке бифуркации.

7.1.8 Итоги рассмотрения фазовой динамики

В этом разделе мы подробно показали, что происходит с автоколебаниями под действием слабой периодической силы. В первом порядке по ε (амплитуде силы), сила существенно влияет на фазу колебаний, в то время как амплитуда возмущается мало. На плоскости параметров внешнего воздействия ν, ε (расстройка – амплитуда) существует область синхронизации (7.30), см. рис. 7.4а. Эта область ограничивается двумя прямыми, наклоны которых определяются экстремумами функции q (7.20). Внутри этой области медленная фаза ψ принимает устойчивое стационарное значение (или одно из возможных устойчивых значений), и фаза колебаний ϕ вращается с частотой внешней силы. При этом процесс $\mathbf{x}(t)$ периодичен с периодом внешнего воздействия. Вне области синхронизации фаза ϕ вращается с частотой, отличной от частоты внешней силы, и процесс $\mathbf{x}(t)$ в общем случае квазипериодический. Одна из фундаментальных частот – это частота

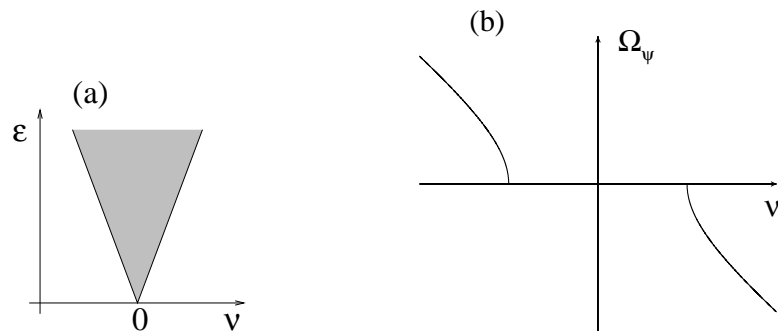


Рис. 7.4. (а) Область синхронизации на плоскости параметров ν, ε . В соответствии с (7.30) границы области синхронизации – прямые линии. (б) Зависимость частоты биений от расстройки при фиксированной амплитуде силы.

та внешней силы, другая – так называемая частота биений – задается выражением (7.34). На пороге синхронизации частота биений растет как квадратный корень параметра (см. (7.35)); эволюция во времени выглядит как периодическая последовательность синхронных участков, разделенных 2π -проскоками фазы.

Описанная выше картина основана на предположении малости амплитуды ε . Ниже мы кратко обсудим, что меняется при средней и большой амплитуде силы; более детальный анализ будет дан в разделе 7.3.

Средняя амплитуда силы

В этом случае качественные характеристики динамики не меняются: внутри области синхронизации наблюдается периодическое движение с периодом внешней силы, а вне этой области – квазипериодическое. Количественно поведение частоты биений на пороге синхронизации – корневая зависимость от параметров (7.35) – остается тем же, поскольку оно определяется типом бифуркации, а бифуркация и при средних амплитудах силы имеет тип седло–узел. Однако остальные характерные черты синхронизации меняются следующим образом.

- (i) Границы области синхронизации при средних ε – не прямые

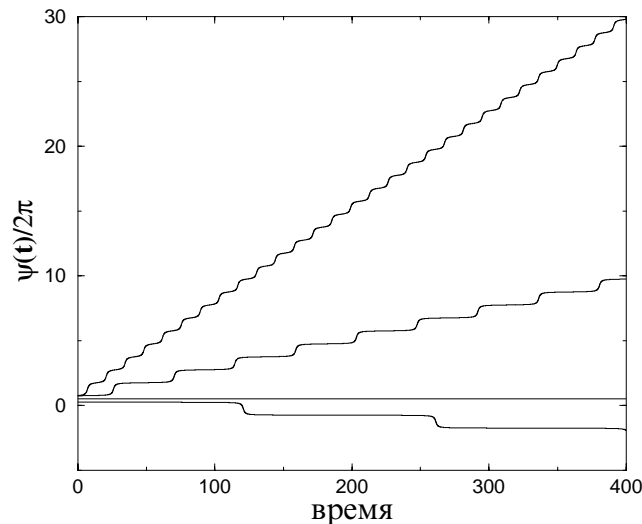


Рис. 7.5. Динамика фазы согласно (7.24) при $q(\psi) = \sin \psi$, $\varepsilon = 1$ (здесь параметр ε положен равным единице, а не малому значению, что соответствует изменению масштаба времени) и различных значениях расстройки: снизу вверх $\nu = 1.001, 0, -1.01, -1.1$.

линии, а, вообще говоря, кривые. Если в разложении Фурье (7.18) резонансные члены отсутствуют, то они могут появиться в высших приближениях, т.е. как члены пропорциональные ε^2 , ε^3 , и т.д. В этих случаях ширина области синхронизации особенно мала при $\varepsilon \rightarrow 0$.

- (ii) В синхронном режиме разность фаз осциллятора ϕ и внешней силы более не является постоянной, как вытекает из (7.31), а становится периодической (с периодом внешней силы) функцией времени. Причиной тому нерезонансные члены в разложении (7.18).

Большая амплитуда силы

Здесь может меняться и качественная картина синхронизации. Переход к ней может происходить через другие бифуркации. Более того, могут наблюдаться сложные режимы, включая хаос – мы обсудим это в разделе 7.3.

Важно отметить, что, хотя мы и рассматривали случай малой силы, синхронизацию нельзя рассматривать в рамках *теории линейного отклика*. В самом деле, для физика, рассматривающего уравнение (7.5), естественно было бы попробовать применить метод возмущений и представить отклик в виде ряда по ε . Мы уже знаем ответ и можем сразу сказать, что этот подход будет работать только вне области синхронизации, где квазипериодическое движение можно примерно представить как комбинацию невозмущенных колебаний на частоте ω_0 и вынужденного решения с частотой ω . Внутри области синхронизации процесс имеет только частоту ω , так что, формально говоря, отклик на частоте воздействия имеет порядок $O(1)$ и его нельзя получить разложением по ε . Линейная или слабонелинейная теория возмущений не работает потому, что невозмущенные автоколебания в определенном смысле сингулярны, поскольку фаза нейтральна и может испытывать большие, порядка $O(1)$, отклонения при сколь угодно малой силе. Другим проявлением этой сингулярности служит довольно необычная для физики зависимость наблюдаемой частоты от расстройки: у нее есть идеальный горизонтальный участок с хорошо определенными конечными точками (рис. 7.4b). Во многих случаях, когда такие «ступеньки» встречаются в физических задачах, их можно объяснить проявлением синхронизации (см. обсуждение ступенек Шапиро в вольтамперной характеристике контактов Джозефсона в разделе 4.1.8).

7.2 Слабо нелинейные автоколебания

В предыдущем разделе мы использовали малость силы, чтобы получить уравнение для фазы. В общем случае внешнее воздействие влияет и на фазу, и на амплитуду, и последним эффектом пренебрегать нельзя. Во многих ситуациях, особенно когда амплитуды колебаний и силы велики, не остается ничего другого, как исследовать поведение системы численно. Здесь мы рассмотрим важный случай, когда свойства синхронизации могут быть в значительной степени исследованы аналитически: мы будем предполагать малость и силы, и амплитуды автоколебаний. Малость амплитуды будет пониматься в смысле близости автоколебаний к линейным колебаниям; безразмерным малым параметром служит отношение периода колебаний к характерному времени изменений амплитуды. Существование этого малого параметра позволяет описать задачу с помощью усредненных (по периоду колебаний) амплитудных уравнений, которые являются универсальными. Таким образом, анализ усредненных уравнений дает решение для целого класса слабонелинейных колебательных систем.

7.2.1 Амплитудное уравнение

Слабонелинейные системы подробно описаны в литературе (см., например, монографии [Боголюбов и Митропольский 1961; Minorsky 1962; Хаяси 1964; Найфэ 1979; Glendinning 1994]). Не входя в технические детали, мы дадим схему вывода амплитудных уравнений. Излагаемый метод применим к слабонелинейным колебаниям, т.е. к системам, которые можно представить как слабо возмущенный (членами в правой части) линейный осциллятор с частотой ω_0 :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}) + \varepsilon p(t). \quad (7.36)$$

Это не самая общая форма возмущения, мы предполагаем, что оно состоит из двух частей: нелинейная функция $f(x, \dot{x})$ описывает автономный осциллятор, а периодическая функция времени $p(t) = p(t + T)$ – внешнюю силу с частотой $\omega = 2\pi/T$. Мы записали внешнюю силу как член, пропорциональный малому параметру ε . Член f также должен быть мал; условие этого будет дано позже.

Поскольку (7.36) близко к уравнению линейного осциллятора, можно ожидать, что решение близко к синусоидальному с пока неизвестной амплитудой, частотой и фазой. Все эти величины должны быть в конце концов определены, но на этой стадии можно выбрать

любое представление решения, и первым важным шагом является выбор наиболее подходящего. Поскольку мы ожидаем, что частота колебаний может совпадать (по крайней мере, при некоторых значениях параметров) с частотой внешней силы ω , будем искать решение в следующем комплексном виде

$$x(t) = \frac{1}{2}(A(t)e^{i\omega t} + c.c.), \quad (7.37)$$

т.е. в виде гармонических колебаний с «базовой» частотой ω и зависящей от времени комплексной амплитудой $A(t)$. Отметим, что при этом никаких ограничений на $x(t)$ не накладываем, поскольку наблюдаемая частота может отличаться от ω , если амплитуда A вращается на комплексной плоскости.

Удобно представить уравнение (7.36) в виде линейного осциллятора с частотой ω , вводя дополнительное слагаемое в правой части:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (\omega^2 - \omega_0^2)x + f(x, \dot{x}) + \varepsilon p(t). \quad (7.38)$$

Это слагаемое должно быть также мало, т.е. наше рассмотрение ограничивается диапазоном малых расстройок $\omega - \omega_0$.

Перепишывая (7.38) в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega^2 x + (\omega^2 - \omega_0^2)x + f(x, y) + \varepsilon p(t) \end{aligned}$$

и вводя следующее соотношение⁶ между y и A

$$y = \frac{1}{2}(i\omega A(t)e^{i\omega t} + c.c.), \quad (7.39)$$

получим, разрешая (7.37) и (7.39), следующее уравнение для комплексной амплитуды

$$\dot{A} = \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} \cdot [(\omega^2 - \omega_0^2)x + f(x, y) + \varepsilon p(t)]. \quad (7.40)$$

Усреднение амплитудного уравнения

До сих пор все преобразования были точными, но новое уравнение ничуть не проще для решения, чем исходное (7.36). Используем теперь малость параметров и найдем аналитически разрешимое приближенное уравнение для A . Этот переход можно совершить математически строго (различные варианты известны как асимптотический метод [Боголюбов и Митропольский 1961], метод усреднения [Найфэ

⁶ Поскольку новая переменная A комплексна, для однозначного ее определения нужно еще одно соотношение между (x, y) и A .

1979], метод многих масштабов [Kahn 1990]), здесь мы изложим только основную идею. Поскольку правая часть (7.40) мала, изменения A могут быть либо медленными, если они велики, либо малыми, если они быстрые, например с частотой порядка ω . Ограничимся рассмотрением больших медленных изменений, то есть пренебрежем всеми быстрыми членами в правой части (7.40). Пренебрежение членами с быстрыми колебаниями ($e^{\pm i\omega t}$, $e^{\pm i2\omega t}$, и т.д.) можно рассматривать как усреднение по периоду колебаний $T = 2\pi/\omega$; поэтому этот метод называют методом усреднения. Усреднение проводится очень просто: нужно подставить x и y , выраженные через A , в (7.40) и пренебречь всеми осциллирующими членами. В каждом конкретном случае для заданных f и p это можно сделать явно. Мы же хотим показать, что результат получается универсальным для большого класса систем. Отметим прежде всего, что усреднение слагаемого

$$\frac{e^{-i\omega t}\varepsilon p(t)}{i\omega}$$

означает взятие первой Фурье-гармоники периодической функции $p(t)$, в общем случае она не равна нулю и этот член дает комплексную постоянную $-i\varepsilon E$.

Далее, рассмотрим вклад функции f :

$$\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} f(x, y).$$

Пусть f – полином по x, y , тогда мы имеем полином по $Ae^{i\omega t}, A^*e^{-i\omega t}$. Из всех степеней вида $(Ae^{i\omega t})^n (A^*e^{-i\omega t})^m$ после умножения на $e^{-i\omega t}$ и усреднения остаются только члены с $m = n - 1$. Поэтому в результате усреднения могут возникнуть только слагаемые вида $g(|A|^2) \cdot A$, где g – произвольная функция. При малых амплитудах колебаний важны только линейные ($\propto A$) и первые нелинейные ($\propto |A|^2 A$) слагаемые.

Наконец, усреднение первого члена в правой части (7.40) приводит к линейному по A слагаемому. Собирая вместе все члены, получаем амплитудное уравнение в виде

$$\dot{A} = -i\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} A + \mu A - (\gamma + i\kappa)|A|^2 A - i\varepsilon E. \quad (7.41)$$

Здесь мы полагаем параметр μ действительным, так как мнимая часть может быть объединена с первым членом в правой части. Например, для уравнения Ван-дер-Поля (7.2) получаем уравнение (7.41) с $\kappa = 0$ и $\gamma = \mu\beta/4$.

Новые параметры имеют ясный физический смысл. Параметры μ и γ описывают линейный рост и нелинейное ограничение колебаний. Чтобы автоколебания были устойчивыми, необходим рост при малых амплитудах и затухание при больших, что соответствует $\mu > 0$, $\gamma > 0$. Параметр κ описывает нелинейную зависимость частоты колебаний от амплитуды, он может быть как положительным, так и отрицательным, и обращается в нуль в изохронном случае (см. обсуждение в разделе 7.1.3).

Вернемся теперь к условию применимости метода усреднения. Для (7.41) необходима малость всех членов в правой части. Это будет выполняться, если расстройка $|\omega - \omega_0|$ и линейный инкремент μ малы по сравнению с частотой ω_0 . В результате и нелинейный член в правой части будет мал, поскольку амплитуда невозмущенных автоколебаний есть $|A_0|^2 = \mu/\gamma$, и поэтому нелинейный член – того же порядка, что и линейный член μA . Малость параметра μ означает, что неустойчивость состояния равновесия $A = 0$ слабая. Обычно это так вблизи точки бифуркации возникновения предельного цикла. Поэтому амплитудное уравнение (7.41) является универсальным уравнением (нормальной формой) вынужденных колебаний вблизи бифуркации Хопфа.

Выбирая соответствующим образом масштабы для амплитуды A и времени, можно уменьшить число параметров в (7.41). Какие из них должны остаться в результате преобразования, зависит от физической постановки задачи. Поскольку в задаче о синхронизации важна зависимость от параметров внешней силы, удобно при нормировке избавиться от параметров осциллятора. Вводя новую амплитуду и новое время согласно

$$A = \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}} a, \quad t = \mu^{-1} \tau, \quad (7.42)$$

получим

$$\dot{a} = -i\nu a + a - |a|^2 a - i\alpha |a|^2 a - ie, \quad (7.43)$$

где

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega\mu} \approx (\omega - \omega_0)/\mu, \\ \alpha &= \kappa/\gamma, \quad e = \varepsilon E \gamma^{1/2} \mu^{-3/2}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Отметим нетривиальную зависимость от параметров ε (амплитуды внешней силы) и μ (квадрат амплитуды свободных автоколебаний): они появляются в «эффективной» амплитуде силы e в комбинации

$\varepsilon\mu^{-3/2}$. Ниже мы будем выделять режимы слабого ($e \lesssim 1$) и сильного ($e \gtrsim 1$) воздействия; в исходных переменных это соответствует $\varepsilon \lesssim \mu^{3/2}$ и $\varepsilon \gtrsim \mu^{3/2}$.

Прежде чем приступить к исследованию (7.43), опишем вкратце, что происходит в отсутствие силы, $e = 0$. При этом задача сводится к уравнению (7.6). В начале координат $a = 0$ находится неустойчивое состояние равновесия, а устойчивый предельный цикл $a = e^{-i(\nu-\alpha)t}$ имеет амплитуду 1 и частоту $|\nu - \alpha|$.⁷ Из общего решения (7.9) можно видеть, что угловая частота зависит от амплитуды, если $\alpha \neq 0$, и не зависит при $\alpha = 0$. Эти две ситуации мы будем называть неизохронным и изохронным случаями.

7.2.2 Свойства синхронизации: изохронный случай

Рассмотрим случай изохронных автоколебаний, т.е. положим $\alpha = 0$:

$$\dot{a} = -i\nu a + a - |a|^2 a - ie. \quad (7.45)$$

Прежде чем исследовать уравнение (7.45), обсудим смысл различных решений в терминах исходных переменных $x \propto \text{Re}(a(t)e^{i\omega t})$, $y \propto \text{Im}(a(t)e^{i\omega t})$. Стационарному состоянию a отвечают гармонические колебания x, y с частотой ω . Это режим идеальной синхронизации (захвата фазы): в системе происходят только колебания с частотой внешней силы. Если решение $a(t)$ периодически зависит от времени, то в исходных переменных движение квазипериодическое с двумя независимыми частотами: одна – частота внешней силы, другая – частота периодического решения уравнения (7.45). Отметим, что последняя может зависеть от параметров системы.

Подчеркнем, что наличие второй (в дополнение к ω) частоты не обязательно означает десинхронизацию. Действительно, если записать $a(t) = R(t)e^{i\psi(t)}$ и $x(t) = \text{Re}(R(t)e^{i(\psi(t)+\omega t)})$, то наблюдаемую частоту колебаний можно представить в виде

$$\Omega = \langle \dot{\psi} \rangle + \omega. \quad (7.46)$$

(Отметим, что ψ есть правильная разность между фазами осциллятора и внешней силы, ср. с (7.22).) Член $\langle \dot{\psi} \rangle$ зависит от поведения траектории системы на фазовой плоскости $(\text{Re}(a), \text{Im}(a))$. Если она вращается вокруг начала координат, то $\langle \dot{\psi} \rangle \neq 0$, в противном же случае изменения ψ приводят только к модуляции колебаний, но не

⁷ Получается, что эта частота зависит от расстройки ν даже в отсутствие силы: это связано с тем, что мы выбрали систему отсчета (7.37).

к изменению частоты. Кроме того, отметим, что (7.45) инвариантно по отношению к замене $\nu \rightarrow -\nu$, $e \rightarrow -e$, $a \rightarrow a^*$ и $e \rightarrow -e$, $a \rightarrow -a$, так что достаточно рассмотреть только область $\nu > 0$, $e > 0$.

Исследования уравнения (7.45) имеют долгую историю (см., например, [Appleton 1922; van der Pol 1927]), но полная картина была установлена только недавно Холмсом и Рэндом [Holmes and Rand 1978] (см. также [Argyris *et al.* 1994]). Здесь мы опишем только основные эффекты, отсылая за подробностями к цитированным работам.

Примерная бифуркационная диаграмма уравнения (7.45) показана на рис. 7.6. Начнем с нахождения стационарных решений (состояний равновесия). Полагая $\dot{a} = 0$, получим кубическое уравнение для квадрата амплитуды $R^2 = |a|^2$:

$$R^2(1 - R^2)^2 + \nu^2 R^2 = e^2.$$

Это уравнение имеет три действительных корня, если

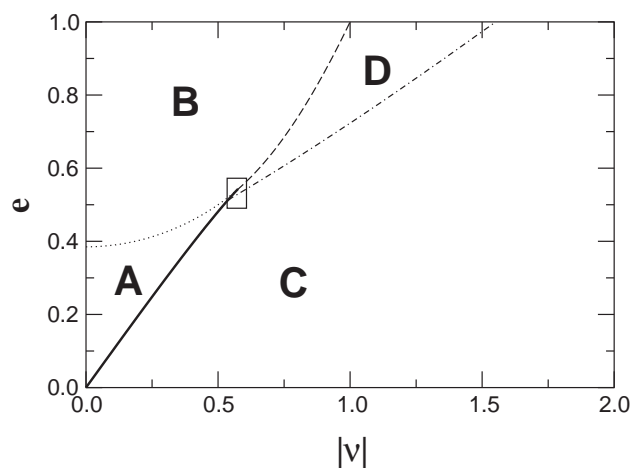


Рис. 7.6. Бифуркационная диаграмма изохронных автоколебаний под внешним воздействием (7.45), в зависимости от расстройки ν и (перенормированной) амплитуды силы e . В областях A и B есть устойчивая точка, соответствующая устойчивому синхронизованному состоянию (в A дополнительно есть пара неустойчивых точек). В областях C и D есть неустойчивая точка и предельный цикл; различие C и D обсуждается в тексте и на рис. 7.9. Переход от A к C осуществляется через бифуркацию седло-узел (жирная кривая) и показан на рис. 7.7 и 7.8. Переход $B \rightarrow D \rightarrow C$ показан на рис. 7.9 и 7.10. Линия бифуркации Хопфа ($B \rightarrow D$) показана штриховой линией; переход от захвата частоты к несинхронному состоянию ($D \rightarrow C$) показан штрихпунктирной линией. В области, обозначенной прямоугольником, наблюдаются сложные бифуркации. Из [Pikovsky *et al.* 2000].

$$9\nu^2 + 1 - (1 - 3\nu^2)^{3/2} < \frac{27e^2}{2} < 9\nu^2 + 1 + (1 - 3\nu^2)^{3/2},$$

и один действительный корень, если эти неравенства не выполнены. Поэтому в (7.45) может быть либо три, либо одно состояние равновесия. Область с тремя решениями обозначена на рис. 7.6 *A*. В областях *B*, *C* и *D* есть только одно состояние равновесия.

Устойчивость состояния равновесия определяется с помощью линеаризации (7.45), что приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + (4R^2 - 2)\lambda + (1 - 3R^2)(1 - R^2) + \nu^2 = 0.$$

Видно, что устойчивость зависит от значения амплитуды R , и в зависимости от параметров возможны разные типы состояний равновесия (устойчивый и неустойчивый узел, седло, фокус). Наиболее важна бифуркация Хопфа при $4R^2 - 2 = 0$, ей соответствует гипербола

$$e^2 = \nu^2/2 + \frac{1}{8},$$

разделяющая области *B* и *D* на рис. 7.6.

Уже эти соотношения позволяют нарисовать «огрубленную» картину переходов.⁸ В областях *A* и *B* единственным устойчивым решением является состояние равновесия; это области идеальной синхронизации, при которой амплитуда колебаний постоянна, а фаза имеет постоянный сдвиг по отношению к фазе внешней силы (конечно, эти величины постоянны только в рамках принятого приближения). В областях *C* и *D* глобальным аттрактором (7.45) является предельный цикл; здесь вынужденные автоколебания квазипериодические.

Полезно посмотреть, как синхронизация возникает/исчезает при изменении параметров e, ν .⁹ Из рис. 7.6 ясно, что эти бифуркации различны для малых и больших значений e ; мы обсудим эти два случая по отдельности.

Переход к синхронизации при малой амплитуде внешней силы

Зафиксировав параметр e при некотором малом значении ($\lesssim 0.5$) и изменяя $|\nu|$, мы можем проследить переход из области *A* в *C*. В области *A* есть три состояния равновесия: неустойчивый фокус,

⁸ Мы не будем описывать тонкую структуру бифуркаций вблизи точки $\nu = 0.6, e = 0.5$, см. детали в [Holmes and Rand 1978; Argyris *et al.* 1994].

⁹ Эти безразмерные параметры соотносятся с параметрами исходной системы (7.41) согласно (7.44).

устойчивый узел и седло. В момент бифуркации седло и узел сливаются и рождается устойчивый цикл, как показано на рис. 7.7 и 7.8. Свойства этого перехода практически не отличаются от полученных в фазовом приближении в разделе 7.1. Это не удивительно, ведь развитая в разделе 7.1 теория должна быть универсально справедлива при очень малой силе.

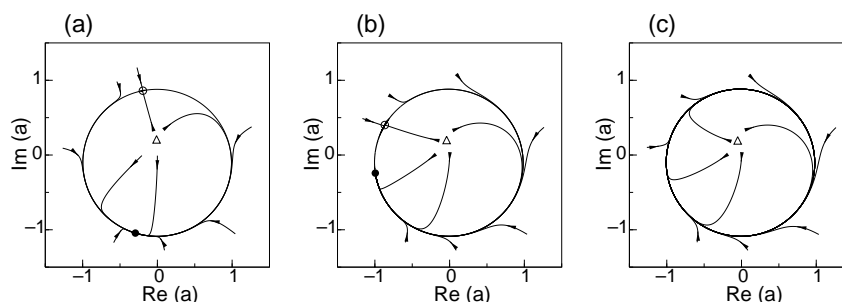


Рис. 7.7. Потеря синхронизации через бифуркацию седло–узел (переход $A \rightarrow C$ на диаграмме рис. 7.6). В центре области синхронизации реализуется ситуация с неустойчивым фокусом (треугольник), устойчивым (●) и неустойчивым (○) состояниями равновесия типа узел и седло (а). Устойчивая и неустойчивая точки подходят друг к другу при приближении к границе области (б). Вне области синхронизации появляется устойчивый цикл (с), рождающийся из инвариантной кривой, образованной неустойчивыми многообразиями седла. Из [Pikovsky *et al.* 2000].

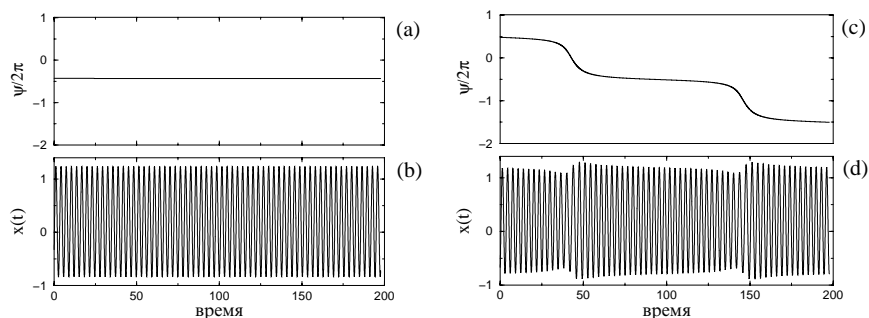


Рис. 7.8. Колебания в слабо нелинейной автоколебательной системе с внешней силой при малой амплитуде силы. Внутри области синхронизации (A на рис. 7.6) амплитуда и разность фаз постоянны (а, б). При потере синхронизации ($A \rightarrow C$ на рис. 7.6) разность фаз ψ меняется неравномерно, участки почти постоянной ψ перемежаются с 2π -проскоками (с); (д) амплитуда слегка модулирована. Из [Pikovsky *et al.* 2000].

Переход к синхронизации при больших амплитудах внешней силы

Зафиксируем теперь параметр ϵ на большом уровне ($\gtrsim 0.5$) и будем менять ν . Первый переход $B \rightarrow D$ – это бифуркация Хопфа (рис. 7.9). В середине области синхронизации состояние равновесия имеет тип узел. При увеличении $|\nu|$ оно превращается в устойчивый фокус. Когда состояние равновесия теряет устойчивость, возникает устойчивый предельный цикл. Поначалу амплитуда цикла так мала, что изображающая точка при вращении не охватывает начало координат. Это означает, что процесс $x(t)$ модулирован по амплитуде и по фазе, но его частота остается такой же, как у внешней силы (см.

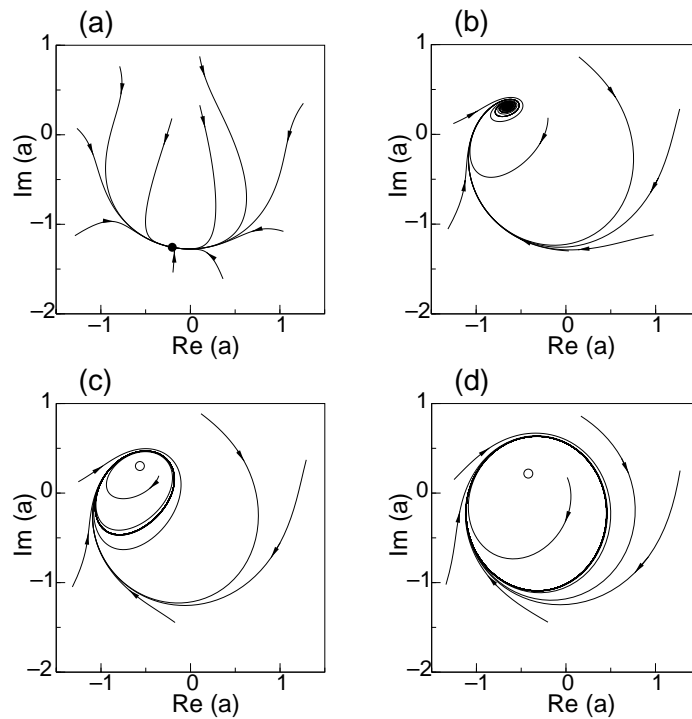


Рис. 7.9. Переход к синхронизации через бифуркацию Хопфа (путь $B \rightarrow D \rightarrow C$ на рис. 7.6). (a) Вблизи центра области синхронизации $\nu \approx 0$ все траектории притягиваются к устойчивому узлу. (b) Вблизи границы синхронизации состояние равновесия становится фокусом. (c) При бифуркации Хопфа в области D возникает предельный цикл, однако он не охватывает начало координат, и наблюдаемая частота по-прежнему совпадает с частотой внешней силы. (d) С ростом амплитуды цикла он охватывает начало координат, и синхронизация нарушается. Из [Pikovsky *et al.* 2000].

рис. 7.10a). Разность фаз теперь не постоянна, но ее средний рост $\Omega_\psi = \langle \dot{\psi} \rangle$ в точности равен нулю. Ситуация меняется, когда цикл начинает охватывать начало координат (переход $D \rightarrow C$, рис. 7.10b). Теперь разность фаз ψ растет и наблюдаемая частота отличается от частоты воздействия.

Два описанных типа перехода можно физически интерпретировать следующим образом. При малой силе возмущается только фаза колебаний, а амплитуда меняется мало. Поэтому и в синхронном, и в асинхронном режиме амплитуда почти постоянна, и меняется только поведение фазы: вне области синхронизации разность фаз меняется, а внутри – нет. Поэтому переход к синхронизации естественно описывать как захват фазы.

Большая сила влияет как на фазу, так и на амплитуду, и в области синхронизации собственные автоколебания подавляются: наблюдаются только колебания с внешней частотой. При увеличении расстройки собственные колебания возникают сначала в форме малой модуляции вынужденного режима; они достигают амплитуды, сравнимой с вынужденными колебаниями, только при большой расстройке. Разница в свойствах перехода к синхронизации при малой и большой силе схематически изображена на рис. 7.11.

Режимы малой и большой силы легко различить экспериментально, по наблюдениям (или вычислениям) спектра мощности процесса (рис. 7.12 и 7.13). При синхронизации спектр мощности состоит из одного пика на частоте силы. При потере синхронизации возникают новые пики. При малой силе (рис. 7.12) эти новые компоненты

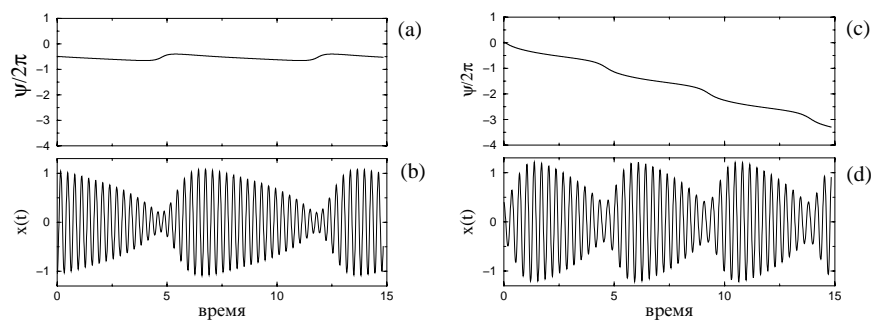


Рис. 7.10. Колебания при больших амплитудах силы. Внутри области синхронизации (D на рис. 7.6), но вблизи ее границы, разность фаз не постоянна, но ограничена (a); амплитуда также модулирована (b). После перехода (область C на рис. 7.6) разность фаз ψ растет неоднородно, но без «почти синхронных» участков (c); (ср. с рис. 7.8). Модуляция амплитуды довольно велика (d). Из [Pikovsky *et al.* 2000].

спектра имеют частоту очень близкую к частоте силы, поскольку вблизи бифуркации седло–узел период возникающего цикла стремится к бесконечности (ср. с (7.35)). При больших амплитудах силы (рис. 7.13) разность между частотой новой компоненты и частотой внешнего воздействия конечна.

7.2.3 Свойства синхронизации в случае неизохронных автоколебаний

Анализ бифуркаций в полном уравнении (7.43) довольно громоздок, он включает рассмотрение различных точек коразмерностей 2 и 3. Детальное описание приведено Левиной и Непомнящим [Levina and Nepomnyaschiy 1986] и Glendinning and Proctor [1993] (отметим, что в [Glendinning and Proctor 1993] используется отличная от нашей нормировка уравнения (7.43)). Из их анализа следует, что при малой неизохронности, $\alpha^2 < 1/3$, структура бифуркаций качественно такая же, как в изохронном случае, $\alpha = 0$; новые бифуркации наблюдаются только при больших значениях α . Мы опишем здесь только случай очень малой амплитуды внешней силы, когда справедливо

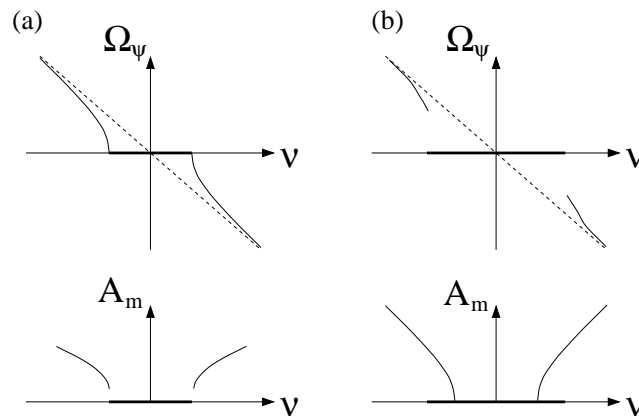


Рис. 7.11. Схематическое представление перехода к синхронизации при малой (а) и большой (б) амплитуде силы. Частота биений $\Omega_\psi = \langle \dot{\psi} \rangle$ и величина амплитудной модуляции A_m показаны в зависимости от расстройки ν . Область синхронизации показана жирной горизонтальной чертой. При слабой связи частота биений на пороге синхронизации растет по корневому закону (см. 7.35); амплитуда биений конечна и остается относительно малой. В противоположность этому, при большой силе частота биений при их появлении конечна, а модуляция амплитуды возрастает постепенно. Отметим, что модуляция есть уже в области синхронизации.

фазовое приближение, описанное в разделе 7.1. Вывод формул фазового приближения для уравнения (7.43) можно считать простым

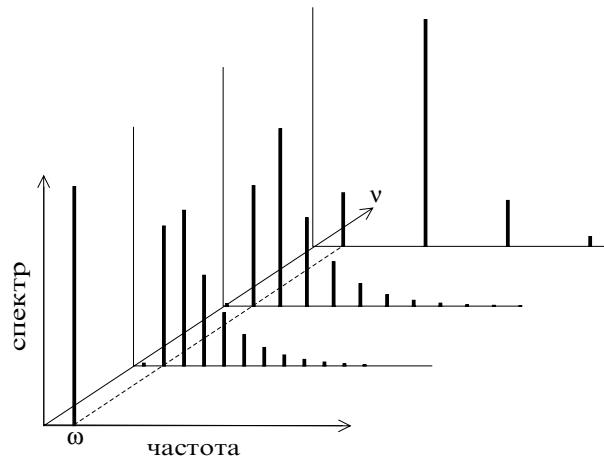


Рис. 7.12. Эволюция спектра при потере синхронизации при постоянной малой амплитуде силы и при изменении расстройки. В синхронном режиме в спектре присутствует только пик на частоте внешней силы ω . При переходе возникает новый пик (и его гармоники) с близкой частотой; при дальнейшем увеличении расстройки этот пик отходит от ω . Горизонтальная ось сдвинута (в частности, начало координат не соответствует нулевой частоте).

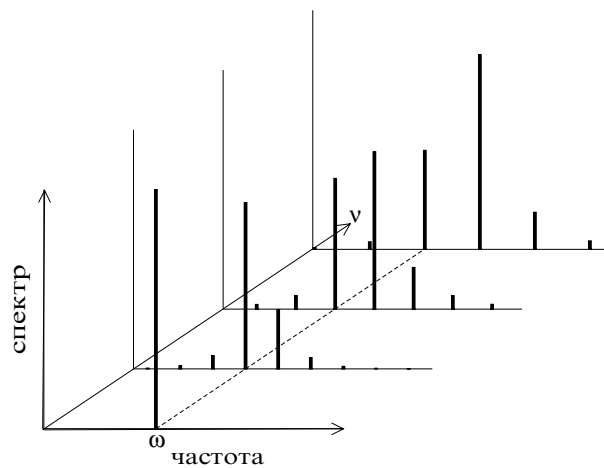


Рис. 7.13. Эволюция спектра при потере синхронизации при большой амплитуде силы при изменении расстройки. При переходе возникает новый пик на конечном расстоянии от основного на частоте ω ; с увеличением расстройки его высота растет, а высота пика на частоте ω уменьшается. Оси проведены так же, как на рис. 7.12.

упражнением, ср. с (7.16); получающееся уравнение для фазы имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= -\nu - \alpha - \epsilon(\cos \phi + \alpha \sin \phi) - \\ &= -\nu - \alpha - \epsilon\sqrt{1 + \alpha^2} \cos(\phi - \phi_0),\end{aligned}\quad (7.47)$$

где $\tan \phi_0 = \alpha$. Из этого уравнения следует область синхронизации

$$-\alpha - \epsilon\sqrt{1 + \alpha^2} < \nu < -\alpha + \epsilon\sqrt{1 + \alpha^2}.$$

Мы видим, что синхронизация происходит вблизи собственной частоты предельного цикла, которая отличается от «линейной» частоты ω_0 (см. (7.36)). Собственная частота в исходных переменных равна $\omega_0 - \alpha\mu$, а в новых вращающихся координатах, в которых записано уравнение (7.43), она равна $-\alpha$. Другой интересной особенностью является то, что при неизохронных колебаниях область синхронизации больше, чем для изохронных. Это объясняется тем, что внешняя сила двояким образом воздействует на колебания. Во-первых, она действует на фазу непосредственно, и это влияние описывается α -независимым членом $\epsilon \cos \phi$ в уравнении (7.47). Во-вторых, сила меняет амплитуду, и эти изменения в силу неизохронности порождают сдвиг фазы; этот эффект описывается слагаемым, пропорциональным $\epsilon\alpha \sin \phi$ в уравнении (7.47). Эти два воздействия по-разному зависят от ϕ , так что итоговый сдвиг фазы синхронизованных колебаний по отношению к фазе внешней силы зависит от параметра α .

7.3 Отображения окружности и кольца

В предыдущих разделах для описания внешнего воздействия на автоколебания использовались различные приближения. Здесь мы представим общий подход, не ограниченный малостью силы или слабой нелинейностью. Поэтому описание синхронизации будет общим, но качественным: оно не позволит, например, вычислить границы области синхронизации для данных уравнений.

Этот общий подход основан на построении **отображения кольца**, которое описывает динамику периодически возмущаемых автоколебаний в окрестности предельного цикла. Поскольку динамика в отсутствие силы известна, структура этого отображения может быть получена просто из соображений непрерывности. В некоторой области параметров, в частности при малой силе, отображение имеет



притягивающую инвариантную кривую, так что можно рассматривать динамику на этой кривой и получить одномерное **отображение окружности**. Общие свойства отображения окружности подробно исследовались математиками, что привело к красивой и глубокой теории, имеющей большое значение и для других разделов нелинейной динамики (теория Колмогорова–Арнольда–Мозера, метод ренормализационной группы и т.д.). При большой силе инвариантная кривая разрушается, и нужно исследовать полное отображение кольца. Это разрушение обычно сопровождается появлением хаоса, но детальное рассмотрение таких режимов выходит за рамки данной книги.

В этом разделе мы опишем свойства отображения окружности, с акцентом на те, которые важны для явлений синхронизации. Затем на одном примере отображения кольца мы продемонстрируем связь между потерей синхронизации и возникновением хаоса при большой внешней силе.

7.3.1 Отображение окружности: вывод и примеры

В разделе 7.1 мы показали, что уравнения движения динамической системы с периодической силой общего вида (7.5) в окрестности предельного цикла могут быть сведены при малой амплитуде силы ε к фазовому уравнению (7.15)

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon Q(\phi, t). \quad (7.48)$$

В отличие от предыдущего исследования, здесь мы будем изучать это уравнение без каких-либо дальнейших упрощений. Более того, мы не будем считать параметр ε малым, а будем рассматривать (7.48) в более общем контексте. Обоснование этому будет дано в разделе 7.3.3.

Правая часть (7.48) есть 2π -периодическая функция фазы ϕ и T -периодическая функция времени t . Поэтому фазовое пространство динамической системы (7.48) есть двумерный тор $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 \leq t < T$. Эту двумерную систему с непрерывным временем можно свести к одномерному отображению. Такое сведение особенно просто для систем с явной периодической зависимостью от времени: можно использовать стробоскопическое отображение за временной интервал T . Фиксируя фазу внешней силы выбором $t = t_0$, можно определить взаимно-однозначное соответствие между точками $\phi(t_0)$ и $\phi(t_0 + T)$. Таким образом определяется гладкое инвертируемое *отображение окружности*:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \omega_0 T + \varepsilon F(\phi_n). \quad (7.49)$$

Здесь уместно сделать несколько замечаний.

- (i) Отображение называется отображением окружности, поскольку оно определено на окружности $0 \leq \phi < 2\pi$. Формально следует применять к правой части операцию взятия по модулю 2π , которую мы для простоты записи опустим.
- (ii) Отображение зависит от момента времени t_0 (т.е. от фазы внешней силы, выбранной для стробоскопического наблюдения процесса). В действительности это не важно: все отображения при разных t_0 эквивалентны, поскольку они гладко преобразуются друг в друга, $\phi(t_0) \rightarrow \phi(t'_0)$, решениями (7.48).
- (iii) Если $\varepsilon = 0$, то получается *поворот окружности*. Он описывает стробоскопическое наблюдение движения на предельном цикле. Динамика сдвига окружности, зависящая от параметра $\omega_0 T$, тривиальна. Если отношение T/T_0 рационально, т.е. $\omega_0 T = 2\pi p/q$, то каждая точка окружности периодична с периодом q . Если отношение T/T_0 иррационально, то получается квазипериодическое вращение на окружности. Отметим, что такое усложненное описание свободных периодических автоколебаний возникает из-за того, что система наблюдается стробоскопически с периодом T , который, вообще говоря, не связан с периодом колебаний T_0 . Поэтому стробоскопический подход хорош для различения несинхронных (квазипериодических) и синхронных (периодических с периодом силы и в рациональном соотношении с этим периодом) движений.
- (iv) Выбранная форма записи отображения окружности (7.49) не самая общая. Из (7.48) следует только, что отображение $\phi_{n+1} = \Phi(\phi_n)$ есть монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) + 2\pi$. В (7.49) мы разделили сдвиг и нелинейную функцию, чтобы подчеркнуть физический смысл параметров $\omega_0 T$ и ε : они соответствуют частоте и амплитуде внешней силы. Подобное разделение справедливо, строго говоря, только при малых ε , в противном случае и сдвиг и нелинейный член зависят и от амплитуды, и от частоты силы. Точное соотношение может быть установлено в каждой конкретной задаче.



Прежде чем перейти к обсуждению свойств отображения окружности, приведем простой пример, в котором оно может быть выписано явно. Кроме того, этот пример проиллюстрирует вторую возможность построения отображения окружности: не фаза колебаний наблюдается стробоскопически, а фаза внешней силы берется при определенной фазе колебаний (для исходной динамической системы это отвечает другому способу построения отображения Пуанкаре на торе).

Пример: релаксационный осциллятор «накопление – сброс»

Популярной моделью релаксационных автоколебаний служит система типа накопление – сброс. Она описывается скалярной переменной $x(t)$, динамика которой состоит из двух компонент:

- (i) накопление: x растет во времени линейно $x = (t - t_n)/T_0$, где t_n время предыдущего сброса;
- (ii) сброс: когда x достигает порога $x_{\text{up}} = 1$, значение x мгновенно уменьшается до $x_{\text{down}} = 0$.

Отметим, что мы используем безразмерные переменные, и период колебаний равен T_0 . Эту модель легко обобщить и на случай нелинейного роста x (см., например, [Mirollo and Strogatz 1990b]).

Следует также заметить, что для этой системы мы не пишем уравнения движения типа (7.5). Действительно, такие уравнения должны быть, по крайней мере, двумерными, описывающими как медленное движение (накопление), так и быстрое (сброс). Вообще говоря, это можно сделать с уравнениями (7.5) с большим параметром, равным отношению двух временных масштабов. Упрощенное описание, приведенное выше, справедливо, строго говоря, если этот параметр стремится к бесконечности, и движение в фазовом пространстве сосредотачивается на медленном многообразии (плюс скачки). Такой квазиодномерный характер динамики позволяет свести ее к одномерному отображению окружности без каких-либо приближений.

Воздействовать на релаксационные колебания можно по-разному, см рис. 7.14.

- (i) **Изменение нижнего порога.** Значение x_{down} есть периодическая функция времени, например, $x_{\text{down}} = \varepsilon \sin \omega t$, см. рис. 7.14b. Обозначим время n -го сброса через t_n . Тогда момент следующего сброса вычисляется согласно $t_{n+1} = t_n + T_0 - \varepsilon T_0 \sin \omega t_n$. Вводя фазу внешней силы $\phi^{(e)} = \omega t$, получаем отображение окружности $0 \leq \phi^{(e)} < 2\pi$:

$$\phi_{n+1}^{(e)} = \phi_n^{(e)} + \omega T_0 - \varepsilon \omega T_0 \sin \phi_n^{(e)}. \quad (7.50)$$

- (ii) **Изменение верхнего порога.** Если значение x_{up} меняется по закону $x_{\text{up}} = 1 + \varepsilon \sin \omega t$ (см. рис. 7.14c), то времена n -го и $(n+1)$ -го сброса связаны соотношением $t_{n+1} = t_n + T_0 + \varepsilon T_0 \sin \omega t_{n+1}$. К сожалению, это соотношение неявно по отношению к t_{n+1} . При малых ε мы можем приблизительно разрешить его, $t_{n+1} = t_n + T_0 + \varepsilon T_0 \sin \omega(t_n + T_0)$, что дает (7.50). Однако при больших ε соотношение между t_{n+1} и t_n становится разрывным.
- (iii) **Импульсное воздействие.** Если осциллятор типа накопление – сброс находится под воздействием другого подобного осциллятора, то сила имеет вид периодической (с периодом T) последовательности импульсов. Пусть амплитуда каждого импульса равна ε , тогда состояние после импульса есть $x + \varepsilon$. Здесь возможны два случая: если $x + \varepsilon < x_{\text{up}}$, то накопление продолжается; если $x + \varepsilon > x_{\text{up}}$, то происходит сброс и переменная x принимает значение x_{down} , см. рис. 7.14d. Обозначим интервал времени между внешним импульсом и следующим сбросом через τ_n . Тогда для τ_{n+1} получим разрывное не взаимно-однозначное отображение окружности

$$\tau_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{при } 1 - \left\{ \frac{T - \tau_n}{T_0} \right\} < \varepsilon, \\ T_0(1 - \varepsilon) - T + \tau_n & \text{при } 1 - \left\{ \frac{T - \tau_n}{T_0} \right\} \geq \varepsilon, \end{cases}$$

где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа.

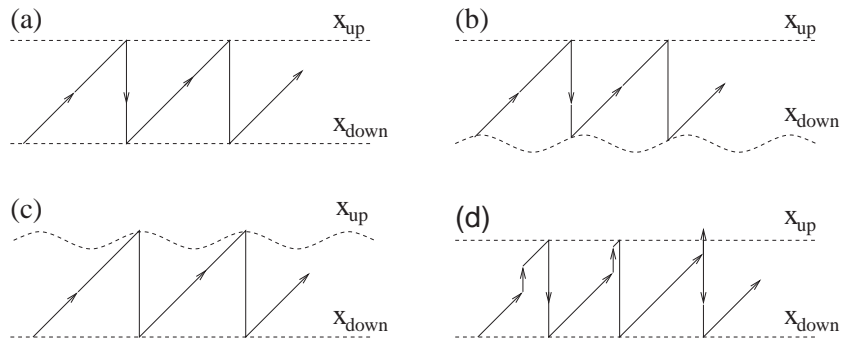


Рис. 7.14. Различные способы воздействия на релаксационные колебания. (a) Колебания в автономном осцилляторе периодические. (b) Изменение нижнего порога. (c) Изменение верхнего порога. (d) Воздействие периодической последовательностью импульсов.

Мы видим, что в зависимости от формы воздействия возможны разные типы отображения окружности. Наиболее часто рассматривается гладкое отображение окружности типа (7.50), ниже мы в основном будем ограничиваться этим случаем.

7.3.2 Свойства отображения окружности

Отображение окружности является одной из основных моделей нелинейной динамики, оно описывается в большинстве книг по нелинейным явлениям, включая математические [Каток и Хассельблат 1999] и физические [Ott 1992; Argyris *et al.* 1994; Шустер 1988; Кузнецов 2001]. Здесь мы коснемся некоторых аспектов теории, акцентируя внимание на свойствах, имеющих отношение к проблеме синхронизации. В качестве основного примера для иллюстрации этих свойств мы будем использовать отображение с синусоидальной нелинейностью

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \eta + \varepsilon \sin \phi_n. \quad (7.51)$$

Это отображение зависит от двух параметров, физический смысл которых вытекает непосредственно из (7.49). Параметр $\eta = \omega_0 T = 2\pi T/T_0$ пропорционален отношению периодов силы и автоколебаний. Он меняется с частотой силы. Параметр ε пропорционален амплитуде внешней силы. При $\varepsilon = 0$ происходит линейное вращение (поворот окружности), и ε определяет уровень нелинейности¹⁰ в отображении (7.51). Нашей целью является описание динамики (7.51) на плоскости параметров (η, ε) ; мы сделаем это в форме следующих утверждений.

1. Поскольку мы рассматриваем фазу по модулю 2π , т.е. на окружности $0 \leq \phi < 2\pi$, она не меняется, если к параметру η добавить $\pm 2\pi$. Это означает, что диаграмма режимов периодична по η с периодом 2π . Поэтому в литературе обычно рассматривается интервал значений $0 \leq \eta < 2\pi$. Для наших же целей более важен случай резонанса $\eta \approx 2\pi$ (что означает $T \approx T_0$). Отметим также, что $2\pi(\eta - 1) = 2\pi(T - T_0)/T_0$ эквивалентно параметру ν , характеризующему расстройку (см. выше (7.23)).
2. Отображение (7.51) обратимо при $|\varepsilon| \leq 1$ и необратимо при $|\varepsilon| > 1$. (В общем случае (7.49) обратимость нарушается, если

¹⁰ Строго говоря, исходные автоколебания нелинейны и при $\varepsilon = 0$, но в контексте отображения окружности удобно считать автономный случай линейным. Это есть следствие линейности фазового уравнения (7.3).

$\varepsilon F'(\phi) = -1$ при некотором ϕ .) Линия $\varepsilon = 1$ называется критической: выше нее возможен хаос. В окрестности критической линии отображение окружности уже не описывает настоящую динамику исходной системы (7.5), здесь нужно рассматривать полное M -мерное отображение кольца. Мы обсудим границы применимости отображения окружности в разделе 7.3.4. Здесь же мы будем полагать $\varepsilon < 1$.

3. При $\varepsilon = 0$ динамика (7.51) сводится к тривиальному повороту окружности, он периодический или квазипериодический в зависимости от того, рационален или иррационален параметр $\eta/2\pi$. При $\varepsilon > 0$ динамику можно характеризовать одним параметром, называемым *числом вращения*. При заданной начальной точке ϕ_0 число вращения определяется как средний поворот фазы за одну итерацию:

$$\rho(\phi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_n - \phi_0}{2\pi n}. \quad (7.52)$$

Известно (см., например, [Каток и Хассельблат 1999]), что число вращения не зависит от начальной точки ϕ_0 и одно и то же для итераций вперед ($n \rightarrow \infty$) и назад ($n \rightarrow -\infty$) во времени. Это следует просто из монотонности отображения: итерации разных точек не могут отличаться более, чем на 2π , так что ρ не зависит от ϕ_0 . Поэтому ρ зависит только от параметров отображения окружности. Ясно, что при $\varepsilon = 0$ число вращения есть $\rho = \eta/2\pi$.

Возможны только два типа движений: с рациональным и иррациональным числом вращения. Прежде чем углубляться в детали, обсудим интерпретацию числа вращения в терминах колебаний исходной системы (7.5). Поскольку n измеряет время в единицах внешнего периода T , число вращения можно переписать как

$$\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T(\phi(t) - \phi(0))}{2\pi t} = \frac{\Omega}{\omega}, \quad (7.53)$$

где мы ввели наблюдаемую частоту Ω как среднюю скорость вращения фазы

$$\Omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t}.$$

Соотношение (7.53) показывает, что число вращения есть отношение наблюдаемой частоты колебаний к частоте внешней силы. (Отметим, что, если отображение окружности записано для

фазы внешней силы, как это было сделано для релаксационного осциллятора, то отношение должно быть обращено.)

4. Иррациональному числу вращения отвечает квазипериодическая динамика фазы. В соответствии с теоремой Данжуа [Denjoy 1932; Каток и Хассельблат 1999], при иррациональном числе вращения ρ нелинейное отображение окружности (7.51) можно с помощью подходящей замены переменной $\phi = g(\theta)$ (с очевидным свойством $g(\theta + 2\pi) = 2\pi + g(\theta)$) привести к сдвигу окружности

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\rho. \quad (7.54)$$

Решение (7.54) тривиально, так что траектория исходного отображения окружности задается формулой

$$\phi_n = g(\theta_0 + n2\pi\rho). \quad (7.55)$$

Произвольная 2π -периодическая функция от ϕ (например, любая из переменных x_k исходной системы) есть квазипериодическая функция дискретного времени n .

В соответствии с (7.53) иррациональное значение ρ означает, что наблюдаемая частота и частота силы несоизмеримы, они и являются базовыми частотами квазипериодического движения.

5. Если отображение окружности имеет периодическую траекторию, то число вращения рационально. В самом деле, на самой этой траектории число вращения очевидным образом рационально и не зависит от начальных условий. При линейном вращении, $\varepsilon = 0$, периодичны все точки на окружности, но в нелинейном случае, $\varepsilon \neq 0$, это вырождение снимается. В общем случае периодические точки нелинейного отображения изолированы. Если период такой точки равен q , и за q итераций фаза ϕ делает p оборотов (так что $\phi_{n+q} = \phi_n + 2\pi p$), то число вращения есть $\rho = p/q$.

Рассмотрим теперь периодические точки, начиная с единичного периода, т.е. с неподвижных точек. Они соответствуют основному резонансу $T \approx T_0$, поэтому положим $\rho = 1$ и будем искать траекторию с $q = p = 1$. Такая траектория должна удовлетворять соотношению

$$\phi + 2\pi = \phi + \omega_0 T + \varepsilon F(\phi),$$

она есть решение уравнения

$$\omega_0 T - 2\pi + \varepsilon F(\phi) = 0.$$

Решение существует, если

$$-\varepsilon F_{\min} \leq \omega_0 T - 2\pi \leq \varepsilon F_{\max}, \quad (7.56)$$

в этой области параметров есть, как минимум, два решения. Легко проверить, что одно из них устойчиво (с $d\phi_{n+1}/d\phi_n < 1$), а другое неустойчиво (с $d\phi_{n+1}/d\phi_n > 1$). Для общей функции F , имеющей более одного минимума и максимума, число решений с одним и тем же периодом может быть более двух, но они всегда появляются парами: устойчивое и неустойчивое. Подчеркнем, что соотношение (7.56) задает область синхронизации с числом вращения 1 на плоскости параметров (η, ε) (ср. с рис. 7.4а и 7.15).

6. Свойства периодических траекторий с большими периодами качественно такие же, как у неподвижной точки. Действительно, итерируя (7.49) q раз, получаем снова отображение окружности типа (7.49), с некоторой более сложной зависимостью от параметров η, ε . Неподвижная точка этого итерированного отображения, удовлетворяющая

$$\phi_q = \phi_0 + 2\pi p, \quad (7.57)$$

принадлежит периодической траектории отображения (7.49) с числом вращения $\rho = p/q$.

Область синхронизации, соответствующую числу вращения p/q , нетрудно найти в первом приближении по ε . Подставляя $\omega_0 T = 2\pi p/q + \varepsilon \kappa$ в (7.49) и сохраняя (при итерациях отображения) только члены порядка $O(\varepsilon)$, получим

$$\phi_{n+q} = \phi_n + \varepsilon q \kappa + 2\pi p q \cdot \varepsilon \tilde{F}(\phi_n) \quad (7.58)$$

с нелинейной функцией

$$\tilde{F}(\phi_n) = \frac{F(\phi_n) + F(\phi_n + 2\pi \frac{p}{q}) + \dots + F(\phi_n + (q-1)2\pi \frac{p}{q})}{q}. \quad (7.59)$$

Если представить $F(\phi)$ в виде ряда Фурье

$$F(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\phi},$$

то функция \tilde{F} выражается в виде

$$\tilde{F}(\phi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{lq} e^{ilq\phi}, \quad (7.60)$$

т.е. она состоит только из гармоник $0, \pm q, \pm 2q, \dots$ исходной 2π -периодической функции F . Используя (7.58) и (7.57), получим область синхронизации (ср. с (7.56))

$$-\varepsilon \tilde{F}_{\min} < \omega_0 T - 2\pi \frac{p}{q} < \varepsilon \tilde{F}_{\max}. \quad (7.61)$$

Поскольку функция \tilde{F} получается из F эффективным усреднением (7.59), ее амплитуда уменьшается с q , и поэтому при больших q области синхронизации малы. Более того, как можно видеть из (7.60), если исходная нелинейная функция F не содержит гармоник $\pm lq$, то область синхронизации с числом вращения p/q в первом приближении по ε исчезает. Именно это имеет место для синус-отображения окружности (7.51). В этой ситуации нужно учитывать члены высших порядков, что приводит к следующей оценке ширины области синхронизации [Арнольд 1983]

$$\Delta\eta \sim \varepsilon^q. \quad (7.62)$$

7. Поскольку в отображении окружности возможны только два режима – периодический и квазипериодический, можно построить диаграмму режимов, как на рис. 7.15. Все области синхронизации имеют вид вертикальных языков [Арнольд 1961], называемых языками Арнольда. Острые языки с числом вращения

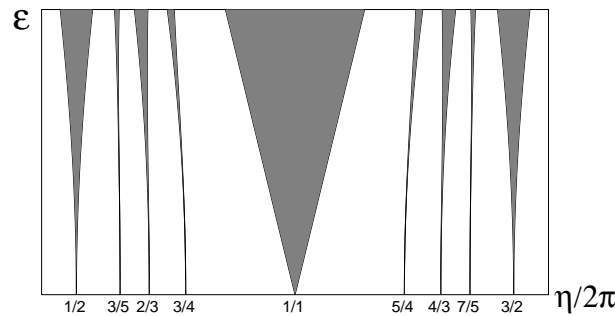


Рис. 7.15. Основные языки Арнольда в синус-отображении окружности (7.51). Острые языков с рациональными числами вращения касаются оси $\varepsilon = 0$ в рациональных точках $\eta/2\pi$. Отметим симметрию $\eta \rightarrow 2\pi - \eta$.

$\rho = p/q$ подходит к точке $\varepsilon = 0$, $\eta = 2\pi p/q$. Все пространство на плоскости параметров между языками соответствует квазипериодическим движениям с иррациональными числами вращения.

Языки Арнольда образуют вертикальные полосы на плоскости параметров, так что порядок рациональных чисел на линии $\varepsilon = 0$ распространяется на всю область $0 < \varepsilon < 1$. Это означает, что при каждом ε имеется упорядоченная последовательность интервалов синхронизации со всеми возможными рациональными числами вращения. В частности, эти интервалы всюду плотны: между любыми двумя квазипериодическими режимами с различными числами вращения есть область синхронизации.

С топологической точки зрения квазипериодические режимы неустойчивы, а синхронные устойчивы: при фиксированном ε и изменении η синхронные режимы наблюдаются на интервалах η , а квазипериодические – в отдельных точках. Это означает, что квазипериодическое движение можно разрушить сколь угодно малым возмущением. Однако с вероятностной точки зрения квазипериодические режимы преобладают,¹¹ поскольку, как было доказано Арнольдом [1961], при малых ε мера Лебега всех интервалов синхронизации стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$; это означает, что возмущения, разрушающие квазипериодичность, довольно маловероятны.

8. При фиксированной амплитуде ε число вращения ρ как функция параметра η принимает постоянные значения в каждой области синхронизации, т.е. эта функция принимает различные постоянные значения на плотном множестве подинтервалов. Эта функция также монотонна и непрерывна [Каток и Хасельблат 1999], она называется *чертовой лестницей* (рис. 7.16). Мера всех рациональных подинтервалов стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, но она равна полной мере на критической линии $\varepsilon = 1$. Чертова лестница с положительной мерой точек между интервалами постоянства называется неполной, а случай, когда мера всех интервалов постоянства полна (т.е. равна мере Лебега), называют полной чертовой лестницей. Множество канторовского типа всех иррациональных чисел вращения можно охарактеризовать его фрактальными размерностями, см. детали в работе [Jensen *et al.* 1983].

¹¹ Точно так же, как иррациональные числа преобладают среди действительных.

9. Переход к синхронизации и выход из нее осуществляются через бифуркацию седло–узел. Это тот же самый переход, что мы описывали в разделе 7.1.7, так что мы не будем повторять подробности. Основной результат (7.35) непосредственно применим к зависимости числа вращения от расстройки: вблизи границы области оно меняется по корневому закону

$$|\rho - \rho_0| \sim |\eta - \eta_c|^{1/2}. \quad (7.63)$$

Отметим, что зависимость (7.63) дает только «огibaющую» числа вращения, которое как функция η на самом деле состоит из бесконечного числа ступенек.

10. Все описанные выше результаты относились к взаимно-однозначным отображениям окружности. Как мы видели при описании релаксационных колебаний, в некоторых случаях отображение окружности необратимо и может иметь полки и разрывы. Некоторые свойства таких отображений такие же, как

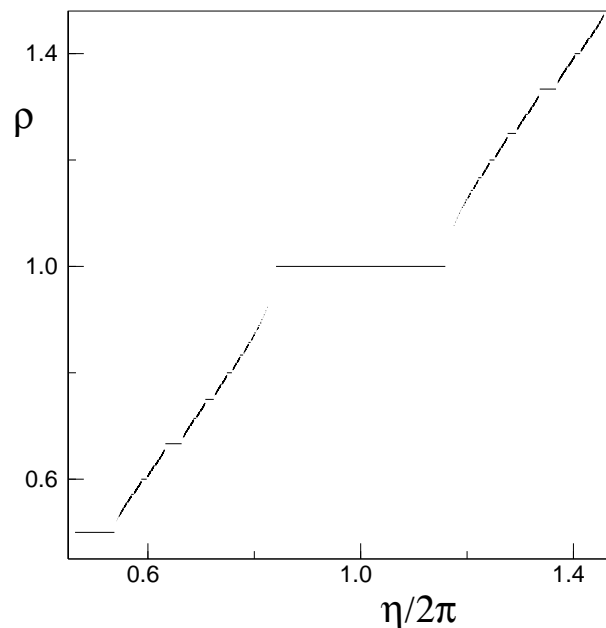


Рис. 7.16. Чертова лестница: зависимость числа вращения от параметра η для синус-отображения окружности (7.51) с $\varepsilon = 1$. Основные ступеньки соответствуют рациональным числам $1, 1/2, 2/3, \dots$. Не все рациональные числа показаны, поэтому области вблизи концов больших ступенек выглядят пустыми.

в гладком случае. Число вращения можно определить для монотонных отображений с разрывами, оно может быть либо рациональным, либо иррациональным. Основное отличие состоит в том, что теперь режимы с устойчивыми периодическими траекториями могут преобладать, например, в отображениях с конечными горизонтальными участками и без скачков квазипериодические режимы могут в принципе существовать, но они обычно занимают область нулевой меры в пространстве параметров [Boyd 1985; Veerman 1989]. Здесь переход к синхронизации происходит не через гладкую бифуркацию седло–узел, а может быть жестким.

11. Если на автоколебания действует квазипериодическая сила, то вместо (7.48) можно записать

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon Q(\phi, \omega_1 t, \omega_2 t),$$

где $Q(\cdot, \cdot, \cdot)$ есть 2π -периодическая функция по каждому из аргументов. Теперь есть две внешние частоты ω_1, ω_2 , которые предполагаются несоизмеримыми. Это уравнение описывает движение на трехмерном торе, и в качестве отображения Пуанкаре получаем, вместо (7.51), отображение окружности с квазипериодической силой вида

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \eta + \varepsilon_1 \sin \phi_n + \varepsilon_2 \sin \left(2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} n + \alpha \right)$$

(см. детали в работах [Ding *et al.* 1989; Glendinning *et al.* 2000]). Как следует из теории [Herman 1983], число вращения (7.52) существует и для этого отображения. Процесс синхронизован, если

$$\rho = \frac{p_2 \omega_2}{q_2 \omega_1} + \frac{p_1}{q_1},$$

и несинхронизован в противном случае. В синхронизованном режиме наблюдаемая частота есть рациональная комбинация двух внешних частот; в несинхронизованном режиме наблюдается движение с тремя несоизмеримыми частотами. Квазипериодическую внешнюю силу можно также рассматривать в контексте слабонелинейных автоколебаний (см. детали в работах [Ланда и Таранкова 1976; Ланда 1980, 1996]).

Теория отображения окружности непосредственно применима к описанию синхронизации автоколебаний внешней силой. Прежде

всего, она дает полную качественную картину динамики при малой и средней силе. Основным результатом (по сравнению с теорией разделов 7.1 и 7.2, где мы ограничивались первым приближением по амплитуде силы) состоит в том, что существует не только основная область синхронизации, где частота колебаний в точности равна частоте силы, но также и области синхронизации высших порядков вида

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{p}{q},$$

где наблюдаемая частота находится в рациональном отношении к частоте воздействия. Практически, при больших p и q область захвата фазы уменьшается, и даже в численных экспериментах удается наблюдать только синхронные состояния с малыми p и q .

7.3.3 Отображение кольца

В нашем выводе отображения окружности (раздел 7.3.1) мы использовали фазовое уравнение (7.48), справедливое только при малых ε . Здесь мы покажем, что отображение окружности имеет существенно большую область применимости и правильно описывает ситуацию при средней и большой силе. Теперь мы не можем пренебрегать изменениями амплитуды (т.е. переменных, перпендикулярных к предельному циклу, см. раздел 7.1) в полной системе (7.5). Для простоты рассмотрения (и особенно графического представления) будем считать систему двумерной, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Тогда при стробоскопическом наблюдении с периодом силы получается двумерное отображение

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t + T).$$

Вблизи предельного цикла невозмущенной системы это отображение имеет простой вид: сжатие в поперечном направлении и поворот фазы согласно отображению окружности. Сжатие по амплитуде означает, что можно ограничиться полосой вокруг предельного цикла, т.е. рассматривать *отображение кольца*.

Динамика отображения окружности может быть периодической или квазипериодической, соответствующие два режима в отображении кольца показаны на рис. 7.17. В обоих случаях точки кольца притягиваются к замкнутой инвариантной кривой, выделенной жирным на рис. 7.17. При нулевой силе — это сам предельный цикл, при малой силе кривая слегка искажается, но остается инвариантной

(т.е. отображается в себя).¹² В квазипериодическом случае вращение точки по инвариантной кривой топологически эквивалентно повороту окружности: все траектории плотны и динамика эргодична. В периодическом случае на инвариантной кривой есть устойчивая и неустойчивая периодические траектории (на рис. 7.17 это неподвижные точки), и устойчивая орбита есть окончательный минимальный аттрактор. Инвариантная кривая образуется неустойчивыми многообразиями (сепаратрисами) неустойчивой периодической орбиты. Существование инвариантной кривой в стробоскопическом отображении кольца означает, что в фазовом пространстве исходной системы с непрерывным временем есть двумерная инвариантная поверхность, называемая инвариантным тором (поскольку динамика периодична по отношению к фазам системы и внешней силы).

Существование устойчивой (в поперечном направлении) инвариантной кривой есть условие справедливости отображения окружности. Действительно, асимптотически на больших временах важна только динамика на этой притягивающей кривой, и на ней как раз и получается отображение окружности в себя. При большой силе инвариантная кривая разрушается, но прежде чем перейти к описанию ее метаморфоз, приведем пример отображения кольца.

¹² Отметим, что инвариантность не означает квазипериодичность динамики. В квазипериодическом случае на кривой нет инвариантных подмножеств, в то время как в периодическом случае устойчивая и неустойчивая периодические траектории на кривой также инвариантны.

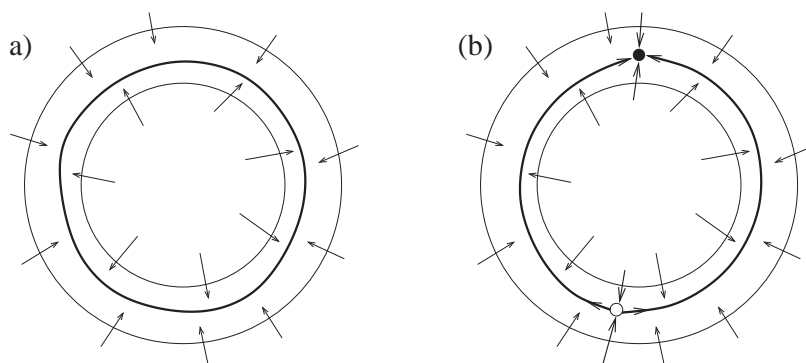


Рис. 7.17. Структура отображения кольца при квазипериодическом вращении (a) и при периодическом режиме (b). Стрелки показывают направление сжатия отображения (ср. с рис. 7.1); устойчивая и неустойчивая неподвижные точки показаны соответственно символами ● и ○.

Пример: автоколебания с импульсной силой

Один из простых способов аналитически получить стробоскопическое отображение кольца – это рассмотреть кусочно-решаемую модель. Можно приблизить силу кусочно-постоянными функциями, решить уравнения на каждом интервале постоянства и потом сшить решения. Мы рассмотрим один особенно простой случай, когда сила есть T -периодическая последовательность δ -импульсов:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (7.64)$$

Между импульсами мы имеем дело с автономными автоколебаниями, так что полная задача может быть разделена на две: решение автономных уравнений между импульсами и нахождение эффекта от δ -импульса. Обе задачи решаемы, если сила (7.64) действует на простой нелинейный осциллятор (7.6). Уравнение имеет вид

$$\frac{dA}{dt} = (1 + i\eta) - (1 + i\alpha)|A|^2 A + i\varepsilon p(t). \quad (7.65)$$

Здесь сила введена таким образом, что под ее воздействием меняется переменная $\text{Im}(A)$, а переменная $\text{Re}(A)$ не меняется: $\text{Im}(A_+) = \text{Im}(A_-) + \varepsilon$, $\text{Re}(A_+) = \text{Re}(A_-)$. Решение уравнения (7.65) между импульсами задается формулами (7.9) и эволюция за время T (начиная с точки θ_0, R_0) записывается в виде

$$R(T) = \left(1 + \frac{1 - R_0^2}{R_0^2} e^{-2T} \right)^{-1/2}, \quad (7.66)$$

$$\theta(T) = \theta_0 + (\eta - \alpha)T - \frac{\alpha}{2} \ln(R_0^2 + (1 - R_0^2)e^{-2T}).$$

Представляя изменение полярных координат R, θ во время импульса как

$$R_+ = \sqrt{R_-^2 + 2R_- \varepsilon \sin \phi_- + \varepsilon^2}, \quad (7.67)$$

$$\theta_+ = \tan^{-1} \left(\tan \theta_- + \frac{\varepsilon}{R_- \cos \theta_-} \right),$$

получим окончательное отображение. Формулы (7.66) и (7.67) можно еще упростить, если считать силу малой, $\varepsilon \ll 1$, так что и отклонения амплитуды R от единицы (амплитуды предельного цикла) тоже малы.

Обозначим переменные непосредственно перед n -м импульсом через R_n, ϕ_n . Тогда для переменных после импульса получим из (7.67)

$$R_+ \approx R_n + \varepsilon \sin \phi_n, \quad \phi_+ \approx \phi_n + \varepsilon \cos \phi_n.$$

Подставляя это выражение в решение (7.66) получаем отображение кольца (ср. с [Zaslavsky1978])

$$R_{n+1} = 1 + (R_n - 1 + \varepsilon \sin \phi_n)e^{-2T},$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + (\eta - \alpha)T + \varepsilon \cos \phi_n - \alpha(R_n - 1 + \varepsilon \sin \phi_n)(1 - e^{-2T}).$$

Если период силы велик, $T \gg 1$, то отображение кольца в направлении R – сильно сжимающее. Если пренебречь изменениями R , то получится отображение окружности:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + (\omega_0 - \alpha)T + \varepsilon \cos \phi_n - \alpha \varepsilon \sin \phi_n. \quad (7.68)$$

Отметим, что два нелинейных члена в (7.68) дают разный вклад в сдвиг фазы. Член $\varepsilon \cos \phi_n$ описывает непосредственное влияние силы на фазу, в то время как член $\alpha \varepsilon \sin \phi_n$ описывает амплитудные возмущения: сила меняет амплитуду, а из-за неизохронности колебаний возникает дополнительный сдвиг фазы, пропорциональный α (ср. с обсуждением в разделе 7.2.3).

7.3.4 Большая сила и переход к хаосу

Как мы видели, при малой силе динамика отображения кольца проста (фактически, она эквивалентна динамике отображения окружности): либо квазипериодическая с иррациональным числом вращения, либо синхронизованная с рациональным числом вращения. В обоих случаях есть притягивающая инвариантная кривая. При иррациональных числах вращения эта кривая заполняется траекториями и является эргодической; при рациональном числе вращения на кривой есть устойчивая (узел) и неустойчивая (седло) периодические орбиты (или несколько пар устойчивых и неустойчивых орбит), и кривая состоит из неустойчивых многообразий седла. Если сила мала, единственной возможностью выхода из синхронизации является бифуркация седло–узел.

При больших амплитудах силы возможны и другие сценарии выхода из синхронизации, в типичных случаях они приводят к хаотическим режимам. Эти переходы описаны в работах [Aronson *et al.* 1982; Афраймович и Шильников 1983], и мы отсылаем читателя к этим статьям за подробностями. Можно выделить три основных сценария перехода к хаосу.

Сценарий I

В первом сценарии переход к хаосу происходит через удвоения периода устойчивой периодической орбиты (рис. 7.18). Здесь странный аттрактор возникает непрерывным образом из устойчивого узла и он остается отделенным от седла. Движение становится хаотическим, но число вращения хорошо определено и остается рациональным, так что возникающий режим можно характеризовать как синхронный, но с хаотической модуляцией. Отметим, что в этом сценарии инвариантная кривая становится негладкой перед первым удвоением периода и не существует как гладкая кривая при следующих бифуркациях. Причина состоит в том, что при удвоении периода мультипликатор периодической орбиты должен быть равен -1 , а для этого он сначала должен стать комплексным. При этом узел превращается в фокус, и

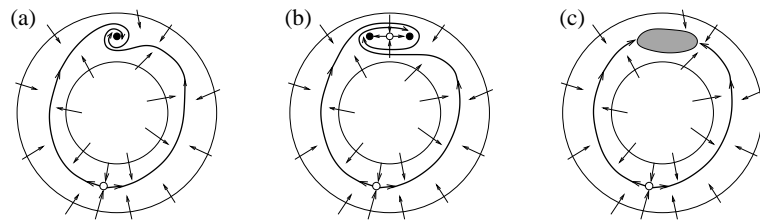


Рис. 7.18. Разрушение инвариантной кривой и переход к хаосу через удвоения периода (сценарий I). (a) Если собственные значения устойчивой неподвижной точки комплексны или отрицательны, то гладкой инвариантной кривой нет. (b) После первого удвоения неустойчивое многообразие седла наматывается на орбиту периода два. (c) После каскада удвоений периода возникает странный аттрактор. Число вращения при этом не меняется.

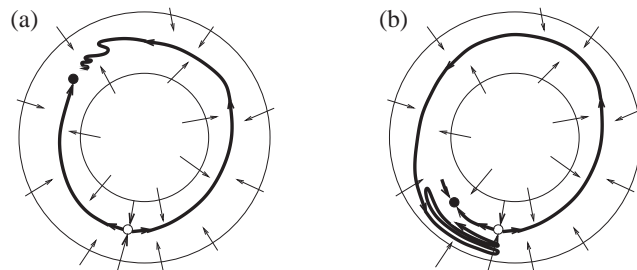


Рис. 7.19. Два других сценария разрушения инвариантной кривой. (a) сценарий II: неустойчивое многообразие седла делает складку и не образует гладкую кривую. (b) сценарий III: неустойчивое многообразие седла пересекает устойчивое, образуя гомоклиническую структуру. В противоположность сценарию II, здесь существует непритягивающее инвариантное хаотическое множество.

инвариантная кривая выглядит как на рис. 7.18а.

Сценарии II, III

При втором и третьем сценариях инвариантная кривая теряет гладкость и превращается в довольно сложное множество, как показано на рис. 7.19. Пока еще нет притягивающего хаоса, но существуют его предвестники, в частности области с локальной неустойчивостью траекторий. Эти области остаются переходными и сосуществуют с устойчивым узлом, но после бифуркации седло-узел они могут принадлежать аттрактору (если нет других устойчивых периодических орбит). Обычно при этом наблюдается переход к хаосу через перемежаемость. Картина динамики близка к показанной на рис. 7.5; она характеризуется длинными ламинарными синхронизованными участками и проскоками фазы; единственное отличие состоит в том, что интервалы между проскоками теперь хаотические.

Сценарий I типичен для середины области синхронизации, где устойчивая и неустойчивая орбиты отделены друг от друга. Здесь при увеличении амплитуды силы может осуществиться описанный переход к хаосу через удвоения периода. Сценарии II и III осуществляются на границах области синхронизации, обычно при изменении расстройки (как правило, сценарий II соответствует меньшим значениям амплитуды силы).

Кроме возможности хаотического поведения есть и другие черты, отличающие синхронизацию при больших амплитудах воздействия по сравнению с малыми. Во-первых, динамика не определяется однозначно числом вращения. Различные области синхронизации могут перекрываться, приводя к мультистабильности, так что при некоторых значениях параметров могут сосуществовать периодические движения с разными числами вращения (т.е. с разными отношениями наблюдаемой частоты и частоты силы). Это явление наблюдалось экспериментально Ван-дер-Полем и Ван-дер-Марком [van der Pol and van der Mark 1927], см. рис. 3.29.¹³ Другое свойство, иногда наблюдаемое при большой силе, заключается в возможности гладкого исчезновения области синхронизации без перехода к хаосу, подробнее см. [Aronson *et al.* 1986].

¹³ Интересно заметить, что пытаясь понять мультистабильность при синхронизации, Картрайт и Литтлвуд [Cartwright and Littlewood 1945] обнаружили некоторые странные особенности динамики, позже позволившие Смейлу [Smale 1980] построить его знаменитую хаотическую подкову.

7.4 Синхронизация ротаторов и контактов Джозефсона

В этой главе мы рассматривали автоколебания и влияние на них периодической силы. На первый взгляд, ротаторы не принадлежат к этому классу моделей, поскольку они не являются автоколебательными системами. Тем не менее, если ротатор приводится в движение постоянной силой, то возникающее движение похоже на автоколебания: в фазовом пространстве есть предельный цикл, и один из ляпуновских показателей равен нулю. Поэтому вращения ротаторов также могут быть синхронизованы периодической внешней силой. Сначала мы опишем примеры ротаторов, а потом обсудим свойства их синхронизации.

7.4.1 Динамика ротаторов и контактов Джозефсона

В качестве простейшего примера рассмотрим маятник под действием постоянного момента K , см. рис. 7.20а. Он описывается уравнениями

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \gamma \frac{d\Psi}{dt} + \kappa^2 \sin \Psi = \frac{K}{I}. \quad (7.69)$$

Здесь κ – частота малых колебаний (в режиме вращения она никакой роли не играет, так что мы даже и не используем наше обычное обозначение для частоты ω), $\gamma > 0$ – декремент затухания, K – момент силы и I – момент инерции. Уравнение (7.69) диссипативно, в нем возможны асимптотически устойчивые режимы двух типов: состояние равновесия (при малом моменте силы) или вращения (при

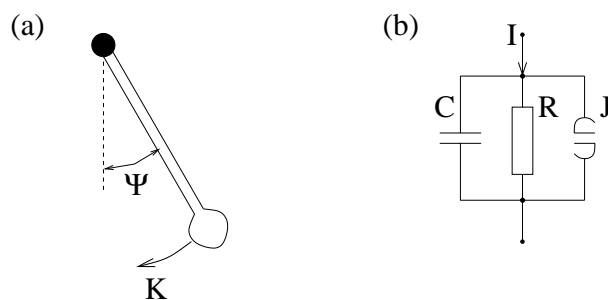


Рис. 7.20. (а) Простейший ротатор – это маятник. (б) Модель шунтированного контакта Джозефсона – «электрического ротатора». Обе системы описываются одними и теми же уравнениями (7.69) и (7.71).

больших K).¹⁴ Фазовое пространство динамической системы (7.69) представляет собой цилиндр $0 \leq \Psi < 2\pi$, $-\infty < \dot{\Psi} < \infty$ (мы считаем положения маятника, отличающиеся на 2π , эквивалентными). Состояние равновесия – это неподвижная точка на цилиндре, а вращениям отвечает замкнутая притягивающая траектория. Хотя физические предпосылки автоколебаний отсутствуют, предельный цикл возникает из-за особой структуры фазового пространства – из-за периодичности по угловой переменной Ψ .

Поскольку вращения описываются предельным циклом, сохраняются все свойства предельного цикла в автономных системах: это изолированная периодическая траектория с одним отрицательным и одним нулевым ляпуновским показателем. Поэтому мы можем рассматривать вращения под действием постоянной силы как автоколебания. Однако не вся развитая для колебаний теория применима в этом случае: цилиндрическая структура фазового пространства накладывает определенные ограничения (например, цикл не может родиться в результате бифуркации Хопфа).

Уравнение (7.69) имеет и другое замечательное применение: оно описывает контакт Джозефсона. Мы дадим здесь краткий его вывод, отсылая за подробностями к книгам [Barone and Paterno 1982] и [Likharev 1991]. В широко применяемой модели шунтированного контакта (рис. 7.20b) предполагается, что ток через контакт состоит из трех компонент: сверхпроводящий ток $I_c \sin \Psi$, ток через сопротивление V/R и ток через емкость $\dot{V}C$. Динамической переменной $\Psi(t)$ служит разность фаз между макроскопическими волновыми функциями сверхпроводников по обе стороны контакта. В контексте динамики контактов Джозефсона эту переменную обычно называют «фазой», мы же предпочтем называть ее «углом», т.к. термин «фаза» мы резервируем за переменной на предельном цикле. Параметр I_c называют критическим током через контакт. Сопротивление R и емкость C характеризуют обычные составляющие тока. Наконец, напряжение V связано с углом Ψ формулой Джозефсона

$$\dot{\Psi} = \frac{2e}{\hbar} V, \quad (7.70)$$

где заряд электрона e и постоянная Планка указывают на квантовый характер эффекта. Собирая все члены, получаем уравнение контакта, питаемого внешним током I ,

¹⁴ На самом деле может существовать и область бистабильности, где оба этих режима устойчивы.

$$I = I_c \sin \Psi + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\Psi}{dt} + \frac{C\hbar}{2e} \frac{d^2\Psi}{dt^2}, \quad (7.71)$$

совпадающее с уравнением (7.69) для маятника. Средняя частота вращений имеет простой физический смысл: согласно (7.70) она пропорциональна постоянному напряжению на контакте. Стационарное состояние ротатора (т.е. $\dot{\Psi} = 0$) соответствует нулевому напряжению, а при вращении напряжение не равно нулю. Синхронизованному вращению соответствуют, как будет показано ниже, ступеньки на вольт-амперной характеристике контакта.

7.4.2 Передемпфированный ротатор во внешнем поле

Как обсуждалось выше, вращениям отвечает предельный цикл в фазовом пространстве, так что общие результаты разделов 7.1 и 7.3 применимы и здесь. Более того, многие эффекты синхронизации можно рассматривать и в более простой постановке задачи, вследствие специфического устройства фазового пространства. Действительно, обычно периодические колебания невозможны в одномерных системах (для предельного цикла нужны, по крайней мере, две переменные). Но для вращений этого ограничения нет: если фазовое пространство – окружность, то вращения возможны.

Для ротатора и контакта Джозефсона одномерная система получается в ультрадиссипативном пределе, когда коэффициент при второй производной стремится к нулю. Для контакта Джозефсона это соответствует нулевой емкости. Уравнение движения принимает вид

$$\frac{d\Psi}{dt} = \alpha(-\sin \Psi + \mathcal{I}), \quad (7.72)$$

где $\alpha = 2eRI_c/\hbar$ и $\mathcal{I} = I/I_c$. Это уравнение совпадает с (7.29): усредненное фазовое уравнение для автоколебаний под действием силы совпадает с уравнением передемпфированного ротатора с постоянным моментом силы. Этот момент \mathcal{I} соответствует расстройке; зависимость частоты вращений $\Omega = \langle \dot{\Psi} \rangle$ от этого параметра была показана на рис. 7.4b. Для контакта Джозефсона Ω пропорциональна напряжению V , а \mathcal{I} – току, поэтому рис. 7.4b дает вольт-амперную характеристику контакта.

Рассмотрим теперь, что происходит с вращениями под действием периодической силы. Если добавить переменный ток, уравнение (7.72) примет вид

$$\frac{d\Psi}{dt} = \alpha(-\sin \Psi + \mathcal{I} + \mathcal{J} \cos(\omega t)). \quad (7.73)$$

Это частный случай уравнения (7.15), поэтому вся теория может быть применена к нашему случаю. Отображение Пуанкаре для этого уравнения есть отображение окружности.

Мы приведем здесь аналитический подход, позволяющий найти области синхронизации при больших амплитудах переменного тока: $\mathcal{J} \gg 1$ (напомним, что внешний ток отнормирован на критический сверхпроводящий ток через контакт). В этом случае сначала можно пренебречь нелинейным членом в (7.73), а потом рассматривать его как возмущение. Чтобы найти синхронизованное решение, будем считать \mathcal{J}^{-1} малым параметром и разложим решение по степеням \mathcal{J}^{-1} :

$$\Psi = n\omega t + \mathcal{J}\Psi_{-1}(t) + \Psi_0(t) + \dots, \quad \langle \dot{\Psi}_{-1} \rangle = \langle \dot{\Psi}_0 \rangle = 0. \quad (7.74)$$

В (7.74) предполагается, что вращения происходят с частотой, кратной частоте силы. Подставляя (7.74) в (7.73), получим для членов $\sim \mathcal{J}$

$$\Psi_{-1}(t) = \alpha\omega^{-1} \sin(n\omega t) + \Psi_{-1}^0, \quad \Psi_{-1}^0 = \text{constant}.$$

Подставляя это в (7.73) и собирая вместе члены $\sim \mathcal{J}^0$, получим

$$\frac{d\Psi_0}{dt} = \alpha\mathcal{I} - n\omega - \alpha \sin[n\omega t + \alpha\mathcal{J}\omega^{-1} \sin(\omega t) + \mathcal{J}\Psi_{-1}^0].$$

Теперь, используя условие $\langle \dot{\Psi}_0 \rangle = 0$ и интегрируя по периоду $2\pi/\omega$, получим

$$0 = \alpha\mathcal{I} - n\omega - \alpha \sin \Psi_{-1}^0 J_n(-\alpha\mathcal{J}\omega^{-1}),$$

где J_n – функция Бесселя первого рода. Поскольку $\sin \Psi_{-1}^0$ лежит между -1 и 1 , находим ширину области синхронизации:

$$\left| \mathcal{I} - n\frac{\omega}{\alpha} \right| < \left| J_n \left(-\frac{\alpha\mathcal{J}}{\omega} \right) \right|. \quad (7.75)$$

В экспериментах с контактом Джозефсона области (7.75) проявляются как ступеньки на вольт-амперной характеристике при $V_n = n\omega\hbar/2e$, они называются ступеньками Шапиро (см. раздел 4.1.8).

Изложенная выше теория показывает, что синхронизация роторов полностью аналогична синхронизации автоколебаний. Фаза ротора может быть введена с использованием угловой переменной, и это приводит к простым определениям периода и частоты. Более того, роторы еще проще, чем осцилляторы – здесь нет таких связанных с амплитудой эффектов как подавление колебаний.

7.5 Системы фазовой автоподстройки

Идея систем фазовой автоподстройки (по-английски: phase-locked loops, PLL) состоит в использовании синхронизации для эффективной и устойчивой модуляции/демодуляции сигналов в электронных системах передачи информации. Информация (например, звук) в частотно-модулированном радиосигнале зашифрована в изменениях (модуляции) частоты. В приемнике необходимо выделить эти изменения, т.е. произвести демодуляцию. В наши дни системы фазовой автоподстройки используются в большинстве радиоприемников. Здесь мы изложим общие принципы их работы, проводя аналогию с описанным выше физическим пониманием синхронизации.

В системе фазовой автоподстройки требуется синхронизовать автоколебания внешним сигналом, но вместо того, чтобы использовать сигнал просто как внешнюю силу (как в (7.5)), конструируется схема, призванная обеспечить синхронизацию. Преимущество такого метода состоит в возможности управлять различными аспектами динамики фазы по отдельности; фактически, конструируется электронное устройство, которое моделирует заданные уравнения для фазы с желаемыми свойствами синхронизации.

Простая блок-схема системы фазовой автоподстройки приведена на рис. 7.21. На вход поступает узкополосный сигнал $x(t)$, который можно представить как синусоидальный процесс с медленно меняющейся фазой и амплитудой:

$$x(t) = A(t) \sin \phi_e(t). \quad (7.76)$$

Поскольку нужная информация содержится в изменениях фазы, выходной сигнал должен быть пропорционален $\dot{\phi}_e$.

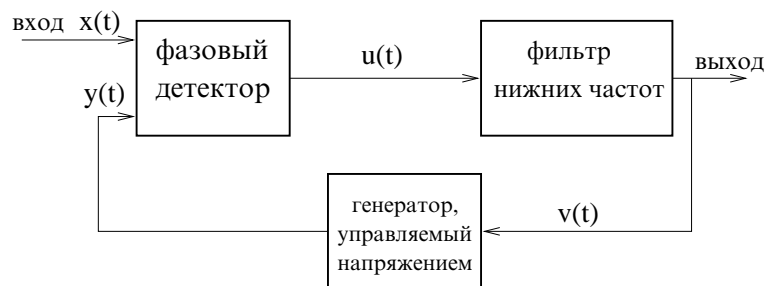


Рис. 7.21. Блок-схема системы фазовой автоподстройки, состоящей из фазового детектора, фильтра нижних частот, и генератора, управляемого напряжением.

Синхронизируемым автогенератором служит генератор, управляемый напряжением (ГУН), его частота зависит от управляющего сигнала $v(t)$. Можно считать, что на выходе ГУН генерируется синусоидальный сигнал с постоянной амплитудой и мгновенной частотой $\dot{\phi}$, линейно зависящей от $v(t)$:

$$y(t) = 2B \cos \phi(t), \quad \frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + Kv(t). \quad (7.77)$$

Следующая цель – сделать сигнал $v(t)$ пропорциональным разности фаз между выходом ГУНа $y(t)$ и входным сигналом $x(t)$. Это достигается в два этапа. На первом этапе с помощью фазового детектора формируется сигнал, пропорциональный некоторой функции от разности фаз между x и y . В простейшем случае эти сигналы просто перемножаются:

$$u(t) = x(t)y(t) = AB[\sin(\phi_e + \phi) + \sin(\phi_e - \phi)]. \quad (7.78)$$

Теперь необходимо выделить компоненту u , пропорциональную разности фаз, это делается с помощью простейшего фильтра нижних частот. Он подавляет в (7.78) слагаемое, пропорциональное сумме фаз (этот член имеет удвоенную частоту). Оставляя только слагаемое, пропорциональное разности фаз, запишем

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = AB \sin(\phi_e - \phi), \quad (7.79)$$

где τ – постоянная времени фильтра.

Вводя разность фаз $\psi = \phi - \phi_e$, из (7.77) и (7.79) получаем:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\psi}{dt} + KAB \sin \psi = -\frac{d^2\phi_e}{dt^2} - \frac{1}{\tau} \left(\frac{d\phi_e}{dt} - \omega_0 \right). \quad (7.80)$$

Это уравнение аналогично (7.69) и (7.71). В простейшем случае, когда частота входного сигнала $\dot{\phi}_e = \omega$ постоянна, правая часть (7.80) тоже постоянна, и в (7.80) есть устойчивое состояние равновесия (если, конечно, мы находимся в области синхронизации, т.е. $\omega \approx \omega_0$). Выходной сигнал v пропорционален разности фаз, $v \propto \sin \psi$. Если входная фаза ϕ_e медленно модулирована, то выходной сигнал изменяется в соответствии с этой модуляцией. Таким образом, система фазовой автоподстройки генерирует сигнал $y(t)$, имеющий такую же (зависящую от времени) фазу, что и входной сигнал $x(t)$; искомый выходной сигнал есть $v(t)$. На физическом языке, автогенератор (ГУН) синхронизован входным сигналом $x(t)$.

Преимущество системы фазовой автоподстройки состоит в том, что синхронизованный сигнал $y(t)$ гораздо чище исходного $x(t)$: весь

амплитудный шум $A(t)$, равно как и высокочастотный, подавляются в результате детектирования фазы и фильтрации (см. рис. 7.22). О практических аспектах применения систем фазовой автоподстройки, в частности о дискретных схемах, можно прочитать в [Best 1984; Lindsey and Chie 1985; Afraimovich *et al.* 1994] и приведенной там литературе.

7.6 Библиографические заметки

Синхронизация автоколебаний периодическим сигналом относится к классическим задачам теории нелинейных колебаний. В наше время внимание исследователей обращено на необычные эффекты, такие как, например, переход к хаосу. Различные примеры изучались численно [Zaslavsky 1978; Gonzalez and Piro 1985; Aronson *et al.* 1986; Parlitz and Lauterborn 1987; Mettin *et al.* 1993; Coombes 1999; Coombes and Bressloff 1999] и экспериментально [Martin and Martienssen 1986; Bryant and Jeffries 1987; Benford *et al.* 1989; Peinke *et al.* 1993]. В частности, Гласс [Glass 1991] дает обзор синхронизации вынужденных релаксационных колебаний с приложениями к сердечной аритмии, эта работа содержит обширную библиографию. В том же выпуске помещена оригинальная статья Арнольда [Arnold 1991]. Несколько работ посвящены свойствам подобия и скейлинга языков Арнольда и описанию чертовой лестницы [Ostlund *et al.* 1983; Jensen *et al.* 1984; Alstrøm *et al.* 1990; Christiansen *et al.* 1990; Reichhardt and Nori 1999].

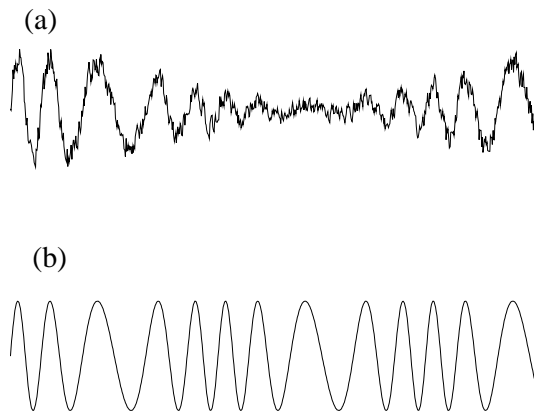


Рис. 7.22. Система фазовой автоподстройки позволяет подавить шум входного сигнала $x(t)$ (а). Изменения амплитуды и высокочастотные шумовые компоненты не проявляются в колебаниях ГУН $y(t)$ (б). По Best [1984].

Глава 8

Взаимная синхронизация двух взаимодействующих периодических осцилляторов

В этой главе мы рассматриваем эффект синхронизации двух автоколебательных систем за счет их взаимодействия. Этот случай является промежуточным по сравнению с рассмотренным в главе 7, когда один осциллятор подвержен внешнему периодическому воздействию, и случаем многих взаимодействующих осцилляторов, который будет рассматриваться ниже в главах 11 и 12. Действительно, случай периодической внешней силы может рассматриваться как частный случай взаимодействия двух осцилляторов при однонаправленной связи. Два осциллятора образуют элементарный блок, который используется при описании случая многих (более, чем двух) взаимосвязанных систем. Проблема может быть сформулирована следующим образом: есть две нелинейные системы, демонстрирующие периодические автоколебания, в общем случае с различными амплитудами и частотами. Эти системы взаимодействуют, и интенсивность взаимодействия есть основной параметр. Нас интересует динамика связанной системы, главным образом захват фаз и частот.

В разделе 8.1 мы развиваем метод фазовой динамики, который справедлив в случае малой связи – в этом случае задача сводится к связанным уравнениям, в которые входят только фазы. Другое приближение используется в разделе 8.2, где обсуждается динамика слабонелинейных осцилляторов. Наконец, в разделе 8.3 мы описываем

синхронизацию релаксационных систем «накопление – сброс». Связанные ротаторы не рассматриваются отдельно: их свойства очень близки к свойствам осцилляторов.

8.1 Фазовая динамика

Если связь между двумя автоколебательными системами мала, то, следуя работам Малкина [1956] и Курамото [Kuramoto 1984], можно вывести замкнутые уравнения для фаз. Этот подход по сути совпадает с использованным в разделе 7.1; здесь мы используем многие изложенные там идеи. Наша основная модель – это система двух связанных осцилляторов

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}^{(1)}}{dt} &= \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}) + \varepsilon \mathbf{p}^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}), \\ \frac{d\mathbf{x}^{(2)}}{dt} &= \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)}) + \varepsilon \mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(1)}).\end{aligned}\tag{8.1}$$

Отметим, что мы не предполагаем какой-либо схожести осцилляторов: они могут быть различной природы и иметь различную размерность. Связь может быть асимметричной. Мы предполагаем только, что автономная динамика (определяемая функциями $\mathbf{f}^{(1),(2)}$) может быть отделена от взаимодействия (описываемого в общем случае различными членами $\mathbf{p}^{(1),(2)}$), пропорционального параметру связи ε . Это предположение мотивировано физической формулировкой проблемы: есть два независимых осциллятора, которые могут функционировать отдельно, но могут и взаимодействовать. Таким образом, мы исключаем ситуацию, когда две колебательные моды наблюдаются в сложной системе, которая не может быть разделена на две составляющие.¹ Другой случай, не учитываемый системой (8.1), – это случай более сложной связи, требующей для своего описания дополнительных динамических переменных.²

При стремлении параметра связи ε к нулю в каждой системе имеется устойчивый предельный цикл, автономные частоты колебаний

¹ Тем не менее, в некоторых системах высокой размерности (например, в лазерах) возможна генерация двух независимых автоколебательных мод, которые можно рассматривать в рамках модели (8.1)

² В электронике это различие соответствует разнице между резистивной связью (нет дополнительных уравнений) и реактивной – емкостной или индуктивной – связью (необходимы дополнительные уравнения). Один такой пример будет рассмотрен в разделе 12.3.

систем равны ω_1 и ω_2 . Тогда, как описано в разделе 7.1, мы можем определить две фазы на циклах и в окрестностях³ (ср. с уравнением (7.3)),

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{dt} &= \omega_1, \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= \omega_2. \end{aligned} \tag{8.2}$$

В общем случае, частоты ω_1, ω_2 находятся в иррациональном соотношении, и, следовательно, движение в системе несвязанных осцилляторов квазипериодическое.

В первом приближении мы можем написать уравнения для фаз связанных систем аналогично уравнению (7.14):

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1(\mathbf{x}^{(1)})}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon \sum_k \frac{\partial \phi_1}{\partial x_k^{(1)}} p_k^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}), \\ \frac{d\phi_2(\mathbf{x}^{(2)})}{dt} &= \omega_2 + \varepsilon \sum_k \frac{\partial \phi_2}{\partial x_k^{(2)}} p_k^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(1)}). \end{aligned} \tag{8.3}$$

Предполагая, что при малой связи возмущения амплитуд малы, подставим в правую часть значения переменных $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ на циклах, где каждая из этих переменных есть некая функция от соответствующей фазы. Таким образом, мы получаем замкнутую систему уравнений для фаз

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon Q_1(\phi_1, \phi_2), \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= \omega_2 + \varepsilon Q_2(\phi_2, \phi_1), \end{aligned} \tag{8.4}$$

с 2π -периодическими (по обоим аргументам) функциями $Q_{1,2}$.

Возможность записать замкнутые уравнения для фазовых переменных означает, что в многомерном фазовом пространстве переменных $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$ существует двумерная инвариантная поверхность, параметризованная фазами ϕ_1, ϕ_2 . Более того, эта поверхность – тор, так как сдвиг любой из фаз на 2π дает ту же самую точку в фазовом пространстве. Этот двумерный тор есть полный аналог инвариантного тора неавтономной системы, описанного в разделе 7.3. Есть две возможности характеризовать динамику на инвариантном торе.

³ По сравнению с разделом 7.1 мы опускаем нижний индекс «0» при обозначении автономных частот; вместо этого мы используем нижний индекс, соответствующий номеру осциллятора.

Первая состоит в использовании малости параметра ε и усреднении уравнения (8.4). Второй подход основан на конструировании отображения окружности.

8.1.1 Усредненные фазовые уравнения

2π -периодические функции $Q_{1,2}$ в уравнениях (8.4) могут быть представлены в виде двойного ряда Фурье

$$Q_1(\phi_1, \phi_2) = \sum_{k,l} a_1^{k,l} e^{ik\phi_1 + il\phi_2}, \quad Q_2(\phi_2, \phi_1) = \sum_{k,l} a_2^{l,k} e^{ik\phi_1 + il\phi_2}.$$

В нулевом приближении фазы вращаются равномерно с невозмущенными (автономными) частотами

$$\phi_1 = \omega_1 t, \quad \phi_2 = \omega_2 t,$$

и в функциях $Q_{1,2}$ все слагаемые соответствуют быстрым вращениям, кроме членов, удовлетворяющих резонансному условию

$$k\omega_1 + l\omega_2 \approx 0.$$

Предположим, что автономные частоты $\omega_{1,2}$ находятся почти в резонансе:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \approx \frac{m}{n}.$$

Тогда все члены ряда Фурье с индексами $k = nj$, $l = -mj$ являются резонансными и вносят вклад в усредненные уравнения. В результате мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon q_1(n\phi_1 - m\phi_2), \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= \omega_2 + \varepsilon q_2(m\phi_2 - n\phi_1), \end{aligned} \tag{8.5}$$

где

$$\begin{aligned} q_1(n\phi_1 - m\phi_2) &= \sum_j a_1^{nj, -mj} e^{ij(n\phi_1 - m\phi_2)}, \\ q_2(m\phi_2 - n\phi_1) &= \sum_j a_2^{mj, -nj} e^{ij(m\phi_2 - n\phi_1)}. \end{aligned}$$

Для разности фаз $\psi = n\phi_1 - m\phi_2$ двух осцилляторов мы получаем из (8.5)

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon q(\psi), \tag{8.6}$$

где

$$\nu = m\omega_2 - n\omega_1, \quad q(\psi) = nq_1(\psi) - mq_2(-\psi). \quad (8.7)$$

Отметим, что уравнение (8.6) имеет точно такой же вид, как уравнение (7.24) раздела 7.1.6, и нам не надо повторять его анализ. В случае синхронизации уравнение (8.6) имеет устойчивое состояние равновесия ψ_0 и наблюдаемые частоты колебаний равны

$$\Omega_{1,2} = \langle \dot{\phi}_{1,2} \rangle = \omega_{1,2} + \varepsilon q_{1,2}(\pm\psi_0).$$

Легко видеть, что отношение частот остается постоянным внутри области синхронизации:

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{m}{n}.$$

Рассмотрим более подробно простейший случай резонанса $1:1$, т.е. случай, когда автономные частоты осцилляторов почти совпадают: $\omega_1 \approx \omega_2$. Тогда в вышеприведенных формулах $m = n = 1$. Далее, предположим, что связь симметрична, т.е. $q_1(\psi) = q_2(\psi)$; тогда, в соответствии с (8.7), получим антисимметричную функцию связи в (8.6), $q(\psi) = -q(-\psi)$. Простейшая и наиболее естественная антисимметричная 2π -периодическая функция есть синус, и соответствующая модель взаимодействия двух осцилляторов выглядит как

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon \sin \psi. \quad (8.8)$$

В зависимости от знака ε возможны два случая – притягивающее или отталкивающее взаимодействие.⁴ Если $\varepsilon < 0$, то устойчивое состояние разности фаз ψ лежит в интервале $-\pi/2 < \psi < \pi/2$, и, в частности, при нулевой расстройке ν устойчивое значение разности фаз равно нулю. Можно сказать, что фазы «притягиваются» друг к другу. Если $\varepsilon > 0$, то устойчивое значение разности фаз лежит в интервале $\pi/2 < \psi < 3\pi/2$, и для совпадающих автономных частот равно π ; это случай «отталкивания». Эти два типа синхронного движения называют синфазным («in-phase») и противофазным («anti-phase» или «out-of-phase») режимам.⁵ Примечательно, что количественные характеристики синхронизации (в частности, ширина области синхронизации) одинаковы для обоих случаев. Стоит

⁴ Или же, что эквивалентно, можно сказать, что ε положительно, но функция связи меняет знак, $\sin \psi \rightarrow -\sin \psi$.

⁵ Напомним читателю, что Гюйгенс в своем первом наблюдении явления синхронизации обнаружил именно противофазный режим синхронизации маятниковых часов.



отметить, что, если форма изохрон в окрестности предельного цикла нетривиальна, то притяжение или отталкивание фаз может не соответствовать притяжению или отталкиванию между исходными переменными $x_k^{(1,2)}$ (см. примеры в [Han *et al.* 1995, 1997; Postnov *et al.* 1999a]).

В усредненном описании синхронизация возникает как идеальный захват фаз: существование устойчивой особой точки ψ_0 в уравнении (8.8) означает не только то, что осцилляторы имеют одинаковые частоты, но и постоянство фазового сдвига, $\phi_1 = \phi_2 + \psi_0$. Последнее свойство не выполняется, если мы рассматриваем полную систему (8.4): за счет нерезонансных членов фазы не захвачены идеально, а осциллируют вокруг траектории усредненной системы (8.5). Эти осцилляции могут быть особенно велики, если колебания близки к релаксационным, т.е., если функция связи $Q_{1,2}$ содержит много гармоник.

8.1.2 Отображение окружности

Правая часть уравнений (8.4) 2π -периодична по обоим переменным; следовательно поток на двумерной фазовой плоскости (ϕ_1, ϕ_2) эквивалентен потоку на двумерном торе $0 \leq \phi_1 < 2\pi$, $0 \leq \phi_2 < 2\pi$. Этот двумерный поток может быть сведен к обратимому отображению окружности.

Выберем прямую $\phi_2 = 0$ в качестве секущей. Выпуская траекторию из $\phi_1(0)$, $\phi_2(0) = 0$ и следуя вдоль нее до точки $\phi_1(t)$, $\phi_2(t) = 2\pi$, получим отображение $\phi_1(0) \rightarrow \phi_1(t)$. Вводя дискретное время n , запишем отображение в виде

$$\phi_1(n+1) = F(\phi_1(n)), \quad (8.9)$$

где функция F такова, что $F(x+2\pi) = 2\pi + F(x)$.⁶ Для невзаимодействующих систем это отображение сводится к линейному повороту

$$\phi_1(n+1) = \phi_1(n) + 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

⁶ Фактически, мы используем здесь малость взаимодействия: поток на торе не произволен, а близок к вращениям по обоим координатам. Это обеспечивает как отсутствие состояний равновесия, так и замкнутых траекторий, не охватывающих тор, и, следовательно, существование отображения Пуанкаре.

Для отображения окружности (8.9) можно определить число вращения ρ в соответствии с уравнением (7.52), что дает отношение двух наблюдаемых частот

$$\rho = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}.$$

Отметим, что возможен эквивалентный способ получения отображения окружности: можно выбрать в качестве секущей $\phi_1 = 0$ и получить отображение $\phi_2 \rightarrow \tilde{F}(\phi_2)$; новое число вращения будет обратно старому.

Вся теория отображения окружности (раздел 7.3) может быть применена к данному случаю. В частности, выход из синхронизации происходит через бифуркацию седло-узел, как описано в разделах 7.1 и 7.3.

8.2 Слабонелинейные осцилляторы

Если связь между осцилляторами относительно велика, то она воздействует не только на фазы, но и на амплитуды. Вообще говоря, свойства сильных взаимодействий неуниверсальны, но в случае слабонелинейных автоколебательных систем можно использовать метод усреднения и получить универсальные уравнения, зависящие только от нескольких существенных параметров. Мы будем следовать подходу Aronson *et al.* [1990]. Так как метод усреднения был уже кратко изложен в разделе 7.2, то здесь мы просто модифицируем уравнения, чтобы учесть взаимную связь.

8.2.1 Общие уравнения

Возьмем два, в общем случае различных, осциллятора и свяжем их линейно

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = f_1(x_1, \dot{x}_1) + D_1(x_2 - x_1) + B_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \quad (8.10)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = f_2(x_2, \dot{x}_2) + D_2(x_1 - x_2) + B_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \quad (8.11)$$

Здесь $\omega_{1,2}$ – частоты линейных несвязанных систем. При интерпретации этих уравнений следует иметь в виду:

- (i) Мы рассматриваем линейную по переменным $x_{1,2}$, $\dot{x}_{1,2}$ связь. Это оправдано, если автономные частоты ω_1 и ω_2 близки, что соответствует резонансу 1 : 1. Действительно, в правой части

основными являются члены, имеющие частоты $\omega_{1,2}$, а эти члены линейны. Если линейные члены отсутствуют, то необходимо рассмотреть члены высших порядков; синхронизация в этом случае будет слабее.

- (ii) Члены, описывающие связь, выбраны пропорциональными разности переменных и их производных. Такая связь исчезает при совпадении состояний двух систем, $x_1 = x_2$, $\dot{x}_1 = \dot{x}_2$. [Aronson *et al.* 1990] называют такую связь «диффузионной». Другая возможность – это «непосредственная» связь, когда, например, уравнение (8.10) модифицируется в

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = f_1(x_1, \dot{x}_1) + D_1 x_2 + B_1 \dot{x}_2.$$

Различие между «непосредственной» и «диффузионной» связью станет важным при рассмотрении явления «вымирания колебаний» (гашения), в остальном же свойства синхронизации при двух типах связи близки.⁷

Как обычно в методе усреднения, мы ищем колебательное решение с общей (пока неизвестной) частотой ω и медленно меняющимися комплексными амплитудами $A_{1,2}$. Используя подстановку

$$x_{1,2}(t) = \frac{1}{2}(A_{1,2}(t)e^{i\omega t} + c.c.), \quad y_{1,2}(t) = \frac{1}{2}(i\omega A_{1,2}(t)e^{i\omega t} + c.c.),$$

получим общие уравнения для медленно меняющихся комплексных амплитуд $A_{1,2}$ (ср. с уравнением (7.41))

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= -i\Delta_1 A_1 + \mu_1 A_1 - (\gamma_1 + i\alpha_1)|A_1|^2 A_1 + (\beta_1 + i\delta_1)(A_2 - A_1), \\ \dot{A}_2 &= -i\Delta_2 A_2 + \mu_2 A_2 - (\gamma_2 + i\alpha_2)|A_2|^2 A_2 + (\beta_2 + i\delta_2)(A_1 - A_2). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Расстройка может быть в первом приближении записана как

$$\Delta_{1,2} = \omega_{1,2} - \omega.$$

Параметры связи $\beta_{1,2}, \delta_{1,2}$ пропорциональны константам связи $B_{1,2}, D_{1,2}$. Другие параметры – $\mu_{1,2}, \gamma_{1,2}, \alpha_{1,2}$ – те же самые, что и в уравнении (7.41). Вводя действительные амплитуду и фазу в

⁷ В разделе 8.2.3 мы обсуждаем различие между описывающими связь членами, пропорциональными $B_{1,2}$ и $D_{1,2}$.

соответствии с $A_{1,2} = R_{1,2}e^{i\phi_{1,2}}$, получим систему из четырех действительных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{R}_1 &= \mu_1 R_1 (1 - \gamma_1 R_1^2) + \beta_1 (R_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) - R_1) - \\
 &\quad - \delta_1 R_2 \sin(\phi_2 - \phi_1), \\
 \dot{\phi}_1 &= -\Delta_1 - \mu_1 \alpha_1 R_1^2 + \delta_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \cos(\phi_2 - \phi_1) - 1 \right) + \\
 &\quad + \beta_1 \frac{R_2}{R_1} \sin(\phi_2 - \phi_1), \\
 \dot{R}_2 &= \mu_2 R_2 (1 - \gamma_2 R_2^2) + \beta_2 (R_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) - R_2) - \\
 &\quad - \delta_2 R_1 \sin(\phi_1 - \phi_2), \\
 \dot{\phi}_2 &= -\Delta_2 - \mu_2 \alpha_2 R_2^2 + \delta_2 \left(\frac{R_1}{R_2} \cos(\phi_1 - \phi_2) - 1 \right) + \\
 &\quad + \beta_2 \frac{R_1}{R_2} \sin(\phi_1 - \phi_2).
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

Примечательно, что члены, описывающие связь, зависят только от разности фаз, поэтому мы можем сократить число уравнений, введя разность фаз $\psi = \phi_2 - \phi_1$. С этой переменной система (8.13) принимает вид

$$\begin{aligned}
 \dot{R}_1 &= \mu_1 R_1 (1 - \gamma_1 R_1^2) + \beta_1 (R_2 \cos \psi - R_1) - \delta_1 R_2 \sin \psi, \\
 \dot{R}_2 &= \mu_2 R_2 (1 - \gamma_2 R_2^2) + \beta_2 (R_1 \cos \psi - R_2) + \delta_2 R_1 \sin \psi, \\
 \dot{\psi} &= -\nu + \mu_1 \alpha_1 R_1^2 - \mu_2 \alpha_2 R_2^2 + \left(-\delta_1 \frac{R_2}{R_1} + \delta_2 \frac{R_1}{R_2} \right) \cos \psi + \\
 &\quad + \delta_1 - \delta_2 - \left(\beta_1 \frac{R_2}{R_1} + \beta_2 \frac{R_1}{R_2} \right) \sin \psi.
 \end{aligned}$$

Здесь $\nu = \omega_2 - \omega_1$ — это расстройка автономных частот.

Приведенные уравнения достаточно общие, и анализ всех возможных случаев весьма затруднителен. Мы можем уменьшить число параметров, предположив, что осцилляторы различаются только линейными частотами, т.е. $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, и так далее. В дополнение, нормализуем время на μ и амплитуды на $\sqrt{\gamma/\mu}$, избавившись тем самым от двух параметров. Тогда оставшиеся коэффициенты β, δ должны рассматриваться как нормализованные на μ , а α — как

нормализованный на γ/μ . Тем не менее, для простоты мы будем использовать те же обозначения и перепишем систему в виде

$$\dot{R}_1 = R_1(1 - R_1^2) + \beta(R_2 \cos \psi - R_1) - \delta R_2 \sin \psi, \quad (8.14)$$

$$\dot{R}_2 = R_2(1 - R_2^2) + \beta(R_1 \cos \psi - R_2) + \delta R_1 \sin \psi, \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} = & -\nu + \alpha(R_1^2 - R_2^2) + \delta \left(-\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1}{R_2} \right) \cos \psi - \\ & - \beta \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1}{R_2} \right) \sin \psi. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Эти уравнения были детально исследованы Aronson *et al.* [1990]. Здесь мы не приводим все их результаты, а лишь обсуждаем наиболее важные физические эффекты.

Прежде чем продолжить, напомним физический смысл параметров в уравнениях (8.14)–(8.16). Параметр α описывает нелинейную зависимость частоты одиночного осциллятора; изохронные колебания соответствуют $\alpha = 0$. Параметр ν – это расстройка автономных частот; когда частоты совпадают, то $\nu = 0$. Параметры δ и β – это константы связи, они будут обсуждены ниже.

Если осцилляторы изохронны ($\alpha = 0$), то переход к синхронизации происходит через бифуркацию седло-узел, при которой возникает предельный цикл, аналогично сценарию, описанному в разделе 8.1. Для неизохронного случая $\alpha \neq 0$ наблюдается более сложная бифуркационная картина.

8.2.2 Вымирание (гашение) колебаний

Интересное явление – вымирание, или гашение, колебаний – наблюдается в случае диффузионной связи. Оно не имеет аналога в случае осциллятора под воздействием внешней силы или в случае непосредственной связи. При достаточно большой диффузионной связи β и расстройке ν начало координат $R_1 = R_2 = 0$ становится устойчивым и колебания в обеих системах вымирают из-за связи.

Продемонстрируем это, линеаризовав уравнения (8.12). Для простоты, возьмем все параметры (кроме частот) одинаковыми. Более того, предположим, что связь чисто диссипативная (см. обсуждение ниже), $\delta = 0$. Окончательно, вводя частоту $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$, запишем $\Delta_1 = -\Delta_2 = \Delta$ и получим

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 &= (i\Delta + \mu)A_1 + \beta(A_2 - A_1), \\ \dot{A}_2 &= (-i\Delta + \mu)A_2 + \beta(A_1 - A_2).\end{aligned}$$

Линейный анализ устойчивости дает собственные значения

$$\lambda = \mu - \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \Delta^2}.$$

Стационарное состояние $A_1 = A_2 = 0$ является, следовательно, устойчивым, если $\mu < \beta < (\mu^2 + \Delta^2)/2\mu$. Физический смысл возникновения устойчивости за счет связи понятен: диффузионная связь вносит дополнительную диссипацию в каждую из систем, и эта диссипация не может быть скомпенсирована воздействием другого осциллятора, если расстройка велика.

8.2.3 Притягивающее и отталкивающее взаимодействие

Сведем систему (8.14)–(8.16) к одному уравнению для разности фаз. Мы можем сделать это при слабой связи, т.е. если параметры β и δ могут считаться малыми. Конечно, мы можем получить это уравнение с помощью фазового приближения, как описано в разделе 8.1, но, поскольку у нас уже есть усредненные уравнения (8.14)–(8.16), то нам проще вывести фазовое уравнение непосредственно из них. В первом приближении амплитуды $R_{1,2}$ мало отличаются от невозмущенных значений $R_{1,2} = 1$:

$$R_{1,2} \approx 1 + r_{1,2}, \quad r_{1,2} \ll 1.$$

Подстановка этого выражения в уравнения (8.14) и (8.15) дает в первом приближении

$$\dot{r}_{1,2} = -2r_{1,2} + \beta(\cos \psi - 1) \mp \delta \sin \psi.$$

Видно, что возмущения амплитуды сильно демпфированы, поэтому мы можем принять $\dot{r}_{1,2} \approx 0$ и получить

$$R_{1,2} = 1 + \frac{\beta}{2}(\cos \psi - 1) \mp \frac{\delta}{2} \sin \psi.$$

Подставляя это в (8.16), получим

$$\dot{\psi} = -\nu - 2(\beta + \alpha\delta) \sin \psi. \tag{8.17}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (8.8) с константой связи $\varepsilon = -2(\beta + \alpha\delta)$.

Рассмотрим сначала идентичные осцилляторы, $\nu = 0$. Из уравнения (8.17) ясно, что устойчивое значение разности фаз между двумя осцилляторами зависит от знака коэффициента $\beta + \alpha\delta$. Если он положителен, то устойчивая разность фаз равна 0, т.е. фазы притягиваются; если он отрицателен, то наблюдается отталкивающее взаимодействие и устойчивая разность фаз равна π . Представляется важным обсудить физический смысл этих двух типов взаимодействия.

Прежде всего, будем различать диссипативную и реактивную связь. В системе (8.10) и (8.11) члены, пропорциональные $D_{1,2}$, – реактивные, а члены, пропорциональные $B_{1,2}$, – диссипативные. Действительно, пренебрежем на время нелинейными и диссипативными членами (т.е. положим $f_{1,2} = 0$) и рассмотрим линейные консервативные осцилляторы. Тогда эффект взаимодействия легко понять: описывающие связь члены, пропорциональные $D_{1,2}$, только сдвигают автономные частоты, в то время как члены, пропорциональные $B_{1,2}$, вносят диссипацию.⁸ Эти эффекты проявляются и в нелинейном случае. В терминах, используемых [Agonson *et al.* 1990], два описывающих связь члена соответствуют скалярной (B) и нескалярной (D) связи. Чтобы объяснить происхождение этих понятий, перепишем уравнение (8.10) в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= -\omega_1^2 x_1 + f_1(x_1, y_1) + D_1(x_2 - x_1) + B_1(y_2 - y_1).\end{aligned}$$

Мы видим, что члены, пропорциональные B_1 , описывают линейную связь по переменной y в уравнении для y , в то время как члены, пропорциональные D_1 , описывают линейную связь по переменной x в уравнении для y . В общем случае, когда уравнение колебательной системы записано в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, скалярные члены связывают одну и ту же переменную, а нескалярные – описывают перекрестную связь.

Физически, диссипативная связь, пропорциональная β , стремится привести две взаимодействующие системы к более однородному режиму, при котором их состояния совпадают (конечно, если $\beta > 0$). В результате, такая связь непосредственно ведет к синфазной синхронизации осцилляторов в соответствии с уравнением (8.17). В противоположность этому, влияние реактивной связи *a priori* не ясно. Чтобы описать влияние различных типов связи на фазовую

⁸ Можно показать, что дивергенция фазового объема дается выражением $-(B_1 + B_2)$, ср. с [Schmidt and Chernikov 1999].

динамику, рассмотрим схематическое представление взаимодействия на рис. 8.1 и 8.2.

На рис. 8.1 мы иллюстрируем случай изохронных осцилляторов ($\alpha = 0$). На схеме (a) показано взаимодействие за счет диссипативной (скалярной) связи: в уравнениях (8.10) и (8.11) отличны от нуля только коэффициенты B . Связь проявляется как сила, действующая в направлении y , и эта сила пропорциональна разности переменных y на предельных циклах. Таким образом, взаимодействие фаз – притя-

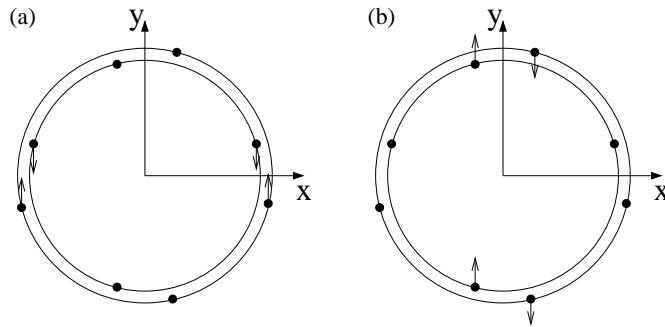


Рис. 8.1. Схематическое представление сил взаимодействия двух изохронных осцилляторов для случая диссипативной (a) и реактивной (b) связи. Для наглядности амплитуды двух предельных циклов изображены как различные.

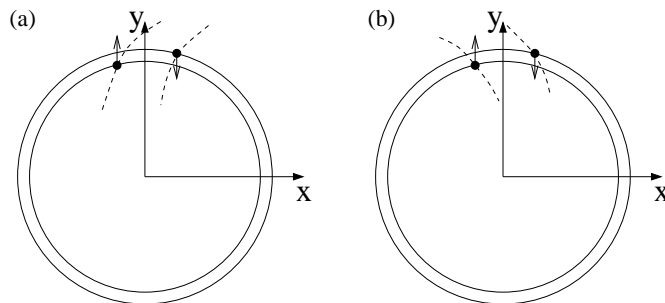


Рис. 8.2. Схематическое представление реактивной связи между неизохронными осцилляторами. Изохроны (линии постоянной фазы) показаны пунктирными линиями, их форма зависит от знака α . Соответственно, связь является отталкивающей (a) или притягивающей (b) в зависимости от знака произведения $\delta\alpha$.

гивающее.⁹ Если фазы близки, то эта сила действует не весь период колебаний, а только когда переменные y отличаются существенно, т.е. когда x близко к минимуму или максимуму. На схеме (b) показан случай реактивной (нескалярной) связи, здесь мы предполагаем, что отсутствуют коэффициенты B . Теперь сила действует также в направлении y , но она пропорциональна разности переменных x . Следовательно, сила действует, когда x близко к нулю, и она не стремится ни сблизить фазы, ни удалить их друг от друга. Таким образом, реактивная связь меняет только амплитуды осцилляторов, а не их фазы. Фазы могут быть изменены только косвенно, если они зависят от амплитуд, т.е., если колебания неизохронны (в изохронном случае фазы не зависят от амплитуд; изохронами являются радиальные линии фазовой плоскости). Итак, реактивная связь не влияет на изохронные осцилляторы. Это соответствует тому, что коэффициент реактивной связи δ появляется в уравнении (8.17) умноженным на параметр изохронности α .

Ситуация меняется при реактивной связи между неизохронным осцилляторами, т.е., если $\alpha \neq 0$. Этот случай показан на рис. 8.2. Взаимодействие увеличивает амплитуду одного осциллятора и уменьшает амплитуду другого, и из-за неизохронности колебаний это приводит к появлению фазового сдвига, т.к. частота зависит от амплитуды. В зависимости от знака произведения $\alpha\delta$ взаимодействие может быть как притягивающим, так и отталкивающим. В результате, устойчивый фазовый сдвиг может быть между 0 и π . Это следует также из (8.17). Тот же самый механизм вызывает фазовую неустойчивость в колебательной среде, что обсуждается позже в главе 11.

Сделаем одно замечание. Мы проиллюстрировали роль только основных членов в фазовой динамике. Если эти члены исчезают, то уравнение (8.17) перестает выполняться. Тогда, чтобы описать приводящее к синхронизации фазовое взаимодействие, необходимо учесть члены более высокого порядка.

8.3 Релаксационные колебания

Универсальной модели релаксационных колебаний не существует, поэтому мы хотим привести здесь только один пример: так назы-

⁹ Строго говоря, этот вывод верен только для слабонелинейных колебаний. В случае сильной нелинейности даже диффузионная связь переменных состояния может привести к отталкиванию фаз [Han *et al.* 1995, 1997; Postnov *et al.* 1999a].

аемый осциллятор типа накопление – сброс. Он не задается системой дифференциальных уравнений: в нем отдельно описываются быстрые и медленные движения. Осциллятор характеризуется единственной переменной x , которая растет от 0 до 1 (состояние «накопление») в соответствии с заданным динамическим законом, который может быть описан обыкновенным дифференциальным уравнением или же функцией времени. Как только достигается порог $x = 1$, осциллятор мгновенно сбрасывается в $x = 0$ («стреляет»). Предполагается, что взаимодействие двух таких осцилляторов происходит только во время «сброса». Когда первый осциллятор x_1 стреляет, он действует на второй, увеличивая его переменную x_2 на величину ε . Если $x_2 + \varepsilon$ превышает порог (т.е. $x_2 + \varepsilon > 1$), второй осциллятор также стреляет, но при этом ответного воздействия на первый осциллятор не происходит (осциллятор в момент сброса не чувствителен к внешнему воздействию).

Динамика данного вида связи сильно диссипативна. Действительно, если фазы двух осцилляторов оказываются близки друг к другу, то осциллятор, который стреляет первым, заставляет стрелять и второй, так что они стреляют одновременно. После этого события фазы осцилляторов совпадают. Если автономные частоты осцилляторов близки, то они продолжают стрелять одновременно. Итак, будет наблюдаться идеальная синхронизация, при которой события «сброса» совпадают, и период будет наименьшим из двух автономных.

Перейдем к аналитическому рассмотрению проблемы, следуя подходу Миролло и Стрэгатца [Mirollo and Strogatz 1990b]. Предположим вначале, что осцилляторы идентичны и имеют автономную частоту ω_0 . Медленное движение определяется функцией $x = f(\phi)$, где ϕ – фаза, удовлетворяющая $\dot{\phi} = \omega_0$. Оно соответствует росту фазы от 0 до 2π , и при $\phi = 2\pi$ происходит сброс.

Два осциллятора описываются потоком на двумерном торе (рис. 8.3); это описание может быть сведено к одномерному отображению Пуанкаре. Выберем линию $\phi_1 = 0$ в качестве секущей; это означает, что мы наблюдаем за фазой второго осциллятора в тот момент времени, когда первый стреляет. Такое построение отображения Пуанкаре $\phi_2^{(0)} \rightarrow F(\phi_2^{(0)})$ проиллюстрировано на рис. 8.3. Начнем с точки 0 с координатами $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \phi_2^{(0)}$. На первой стадии медленного движения достигается точка 1 с $\phi_2^{(1)} = 2\pi$, $\phi_1^{(1)} = 2\pi - \phi_2^{(0)}$. В этот момент осциллятор 2 стреляет, и фаза первого тоже изменится. Если мы предположим, что переменная x меняется на ε , то новая фаза первого осциллятора дается выражением $\phi_1^{(2)} = f^{-1}(f(\phi_1^{(1)}) + \varepsilon)$,

где f^{-1} есть функция, обратная f . Теперь возможны два случая. Если $\phi_1^{(2)} \geq 2\pi$, то первый осциллятор стреляет, и оба осциллятора сбрасываются в ноль (рис. 8.3b), так что $F(\phi_2^{(0)}) = 0$. В другом случае, наблюдается другой интервал медленного движения к точке $\phi_1^{(3)} = 2\pi$, $\phi_2^{(3)} = 2\pi - \phi_1^{(2)}$, за которым следует сброс осциллятора 1. При сбросе фаза ϕ_2 изменяется, и, опять, либо вызывается сброс осциллятора 2 (рис. 8.3c), и фаза ϕ_2 скачком изменяется до 2π ,¹⁰ либо сброса не возникает, и конечная точка отображения Пуанкаре есть $\phi_2^{(4)} = f^{-1}(f(\phi_2^{(3)}) + \varepsilon)$, см. рис. 8.3а.

Легко видеть, что, в силу симметрии, отображение Пуанкаре $\phi_2^4 = F(\phi_2^0)$ может быть записано как двойная итерация отображения h :

$$F(\phi) = h(h(\phi)), \quad h(\phi) = f^{-1}(f(2\pi - \phi) + \varepsilon). \quad (8.18)$$

Это отображение h называется **отображение сброса** (firing map). Окончательное отображение Пуанкаре имеет два плато, где $F(\phi) = 0$ или $F(\phi) = 2\pi$, и гладкую область между ними, см. рис. 8.4. Гладкая область задается уравнением (8.18) и зависит от формы колебаний f . Mirollo and Strogatz [1990b] показали, что, если f монотонна и вогнута вниз (т.е. $f' > 0$, $f'' < 0$), то гладкая часть отображения F строго растягивающая (т.е. производная больше единицы). Это означает, что невозможны другие аттракторы отображения Пуанкаре, кроме $\phi = 0$. Притягивающая точка $\phi = 0$ в точности соответствует

¹⁰ Мы пишем здесь 2π , а не ноль, чтобы показать, что два сброса осциллятора 2 приходятся на один сброс осциллятора 1.

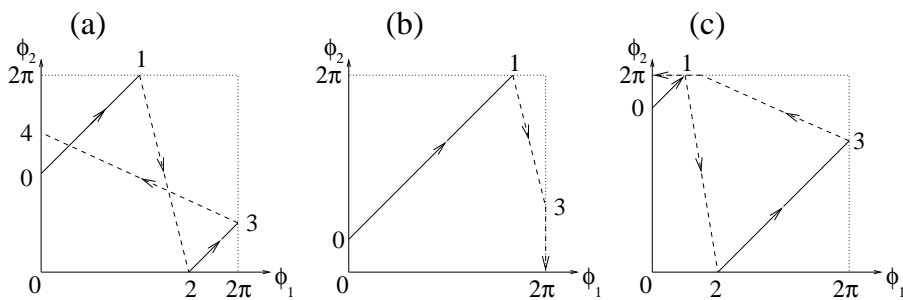


Рис. 8.3. Построение отображения Пуанкаре для связанных осцилляторов типа накопление – сброс. Сплошные линии изображают медленные движения (накопление); пунктирные линии – быстрые движения (сброс). Показаны три возможных типа траекторий, начинающихся в $\phi_1 = 0$. В (а) осцилляторы стреляют не одновременно. В (б) сброс осциллятора 2 вызывает сброс осциллятора 1. В (с) сброс осциллятора 1 вызывает сброс осциллятора 2.

идеально синхронному состоянию, когда оба осциллятора стреляют одновременно.

Описанное выше построение может быть легко обобщено на случай различных (в частности, имеющих различные автономные частоты) осцилляторов. Тогда медленное движение в уравнении 8.3 будет описываться прямой линией, не параллельной диагонали, а имеющей наклон ω_1/ω_2 . Отображение Пуанкаре будет иметь теперь гладкую часть (которая, как и в (8.18), представлена суперпозицией теперь уже различных отображений сброса) и часть, где новая фаза (modulo 2π) равна нулю, см. рис. 8.4б. Устойчивая периодическая орбита этого отображения обязательно проходит через точку $\phi_1 = \phi_2 = 0$, т.е. существует в точности одно событие совпадающих сбросов. В качестве примера, на рис. 8.5 показана синхронизация порядка 2 : 3

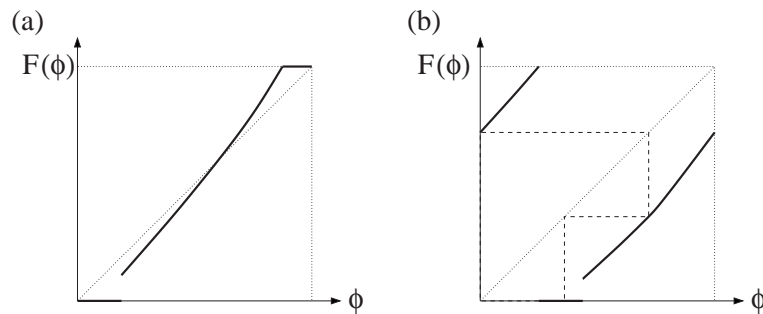


Рис. 8.4. Негладкое отображение окружности, описывающее синхронизацию релаксационных осцилляторов. (а) Осцилляторы идентичны; единственный аттрактор – устойчивая точка $\phi = 0$. (б) Осцилляторы имеют различные автономные частоты. На притягивающей периодической орбите (пунктирная линия) только один сброс происходит одновременно в обоих осцилляторах; другие сбросы не совпадают.

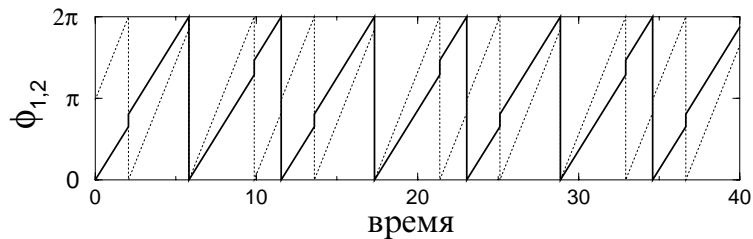


Рис. 8.5. Захват фазы неидентичных релаксационных осцилляторов с соотношением автономных частот $\omega_1/\omega_2 = 1.55$. Наблюдается синхронизация порядка 2 : 3; соответствующая этому режиму периодическая траектория отображения показана на рис. 8.4б.

для систем с соотношением автономных частот $\omega_1/\omega_2 = 1.55$.

Свойства такого негладкого отображения Пуанкаре сходны со свойствами гладкого (см. раздел 7.3). Основное отличие состоит в структуре «чертовой лестницы» и языков Арнольда. Как и в гладком случае, возможны все рациональные и иррациональные числа вращения, но мера иррациональных чисел (в пространстве параметров) теперь нулевая: ситуации с квазипериодическими режимами в отображении на рис. 8.4 исключительны; типичными являются периодические орбиты [Boyd 1985; Veerman 1989]. Это следует из сильной диссипации рассмотренной модели «накопление – сброс».

8.4 Библиографические заметки

Динамике связанных систем посвящена обширная литература. В последнее время основное внимание привлекает сложное поведение и возникновение хаоса за счет связи. В теоретических [Waller and Kapral 1984; Pastor-Díaz *et al.* 1993; Volkov and Romanov 1994; Pastor-Díaz and López-Fraguas 1995; Tass 1995; Kurrer 1997; Lopez-Ruiz and Pomeau 1997; Reddy *et al.* 1999] и экспериментальных [Бондаренко и др. 1989; Thornburg *et al.* 1997] работах заинтересованный читатель найдет дальнейшие ссылки. Связанные ротаторы интенсивно рассматривались в связи с изучением цепочки контактов Джозефсона [Jain *et al.* 1984; Saitoh and Nishino 1991; Valkering *et al.* 2000]. В заключение, упомянем несколько недавних работ, где были рассмотрены различные обобщения модели «накопление – сброс» [Kirk and Stone 1997; Ernst *et al.* 1998; Coombes and Bressloff 1999; S. H. Park *et al.* 1999b].

Глава 9

Синхронизация в системах с шумом

В предыдущих главах мы рассматривали синхронизацию в чисто детерминированных системах, пренебрегая всеми случайностями и флуктуациями. Здесь мы обсудим, как эти явления могут быть включены в картину синхронизации. Мы начнем с описания влияния шума на автоколебания и покажем, что шум приводит к диффузии фазы, тем самым разрушая периодичность. Затем мы рассмотрим синхронизацию периодической внешней силой в присутствии шума. Наконец, мы обсудим взаимную синхронизацию двух зашумленных автогенераторов.

9.1 Автоколебания в присутствии шума

Ни один осциллятор не совершенен: любые часы нужно время от времени подводить, некоторые даже довольно часто. Нерегулярность автоколебаний может быть обусловлена различными факторами, для простоты мы их все будем обозначать как шум. Для детального анализа автоколебаний с шумом нужно позаботиться о правильной математической модели, которая включала бы флуктуации различной природы (технические, тепловые и т.д.). Для многих типов автоколебаний такие детальные модели существуют (см., например, [Малахов 1968]); здесь же мы остановимся только на основных эффектах.

Начнем с описания автоколебаний в присутствии внешнего шума.

Если вернуться к основным уравнениям, описывающим вынужденные колебания (см. главу 7), то легко увидеть, что приближение фазовой динамики можно использовать и при случайной силе, поскольку при выводе уравнения (7.15) никакой регулярности силы не предполагалось. Поэтому мы можем использовать это уравнение и для внешнего шума:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon Q(\phi, t), \quad (9.1)$$

где Q — это 2π -периодическая функция ϕ и произвольная функция времени.

В простейшем случае стохастический член в фазовом уравнении (9.1) вообще не зависит от фазы, так что можно записать

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \xi(t), \quad (9.2)$$

где $\xi(t)$ есть стационарный случайный сигнал. Поскольку мгновенная частота $\dot{\phi}$ (скорость изменения фазы) есть случайная функция времени, фаза совершает случайные блуждания, т.е. имеет место диффузионный процесс. Решение (9.2) записывается как

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t + \int_0^t \xi(\tau) d\tau, \quad (9.3)$$

и из него можно легко найти статистические характеристики диффузии фазы. В предположении, что среднее значение шума равно нулю (если нет, то его можно объединить с частотой ω_0), усредненная по ансамблю фаза в момент времени t есть $\phi_0 + \omega_0 t$. Дисперсию можно получить усреднением квадрата от (9.3), при больших временах справедлива обычная формула Грина–Кубо для диффузионных процессов (см, например, [van Kampen 1992])

$$\langle (\phi(t) - \phi_0 - \omega_0 t)^2 \rangle \propto tD, \quad D = \int_{-\infty}^{\infty} K(t) dt, \quad (9.4)$$

где $K(t) = \langle \xi(\tau)\xi(\tau + t) \rangle$ есть корреляционная функция шума.

Диффузия фазы означает, что колебания не являются более строго периодическими. Качество автоколебаний измеряется постоянной диффузии D , оно служит важной характеристикой часов и электронных автогенераторов. В случае δ -коррелированного гауссовского шума

$$K(t) = \langle \xi(\tau)\xi(\tau + t) \rangle = 2\sigma^2 \delta(t), \quad (9.5)$$

распределение фазы также гауссовское с дисперсией $2\sigma^2 t$ (так что постоянная диффузии равна интенсивности шума $D = 2\sigma^2$). Это

позволяет вычислить автокорреляционную функцию естественной наблюдаемой $x(t) = \cos \phi$. Простые вычисления приводят к экспоненциально затухающим корреляциям

$$\langle x(t)x(t + \tau) \rangle = \frac{1}{2} \exp[-\frac{1}{2}\tau\sigma^2] \cos \omega_0 \tau,$$

которым соответствует лоренцевский пик в спектре мощности, максимум которого приходится на среднюю частоту ω_0 . Ширина пика в спектре равна σ^2 , т.е. пропорциональна постоянной диффузии фазы.

9.2 Синхронизация в присутствии шума

9.2.1 Качественная картина ланжевеновской динамики

Как мы видели в разделе 7.1, основные свойства динамики фазы могут быть описаны усредненным уравнением (ср. с (7.24) и (8.6)):

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon q(\psi), \quad (9.6)$$

где ψ – разность между фазой автоколебаний и фазой внешней силы. Чтобы учесть шум, представляется естественным включить флуктуационный член в правую часть уравнения, т.е. записать его в форме уравнения Ланжевена

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon q(\psi) + \xi(t) \quad (9.7)$$

с аддитивным шумом $\xi(t)$. Уравнение (9.7) описывает таким образом автоколебания в присутствии двух сил – периодической и стохастической.

Физически удобно интерпретировать ланжевеновскую динамику (9.7) как случайные блуждания «частицы» в одномерном потенциале (см. рис. 9.2 ниже). Действительно, детерминированную часть силы в правой части (9.7) можно записать как

$$-\nu + \varepsilon q(\psi) = -\frac{dV}{d\psi}, \quad V(\psi) = \nu\psi - \varepsilon \int^{\psi} q(x) dx. \quad (9.8)$$

Более того, движение частицы передемпфировано, поскольку у фазы ψ нет инерции.¹ В отсутствие шума частица либо сидит в минимуме

¹ Движение частицы в среде с трением обычно подчиняется уравнению $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + dV/dx = 0$ (ср. с (7.69) и (7.71)), но, если затухание очень велико ($\gamma \rightarrow \infty$), то второй производной можно пренебречь и получить уравнение вида (9.6). То же самое уравнение получается в пределе $m \rightarrow 0$.

потенциала, либо скатывается вниз (рис. 9.1). Потенциал с минимумами означает существование состояний равновесия² и соответствует синхронизации, в то время как монотонный потенциал отвечает квазипериодическому движению с вращающейся фазой (см. также обсуждение этой ситуации на качественном уровне в разделе 3.4).

Шум слабо влияет на квазипериодический режим: здесь средняя скорость частицы не равна нулю, и она слабо меняется в присутствии шума. Влияние же шума на синхронное состояние может быть весьма сильным. Действительно, шум может выбить частицу из устойчивого состояния; если он достаточно велик, то он может перевести «частицу» в соседнее устойчивое положение. При этом фаза меняется на $\pm 2\pi$, это явление называют **проскоком фазы** (phase slip), оно показано на рис. 9.2. Чтобы произошел проскок, частица должна преодолеть потенциальный барьер ΔV_{\pm} , так что вероятность проскока может быть мала. В общем случае вероятность проскока растет с интенсивностью шума и убывает с высотой барьера, поэтому, если $\nu \neq 0$, то вероятности проскоков $+2\pi$ и -2π различны, и частица в среднем движется в одну сторону. Наблюдаемая при этом разность частот $\Omega_{\psi} = \langle \dot{\psi} \rangle$ не равна нулю.³ Изменение фазы во времени напоминает случай чисто детерминированной системы вблизи порога синхронизации (ср. рис. 9.2 с рис. 7.5), только теперь проскоки фазы

² Для простоты мы рассматриваем случай только одного минимума на периоде $[0, 2\pi)$.

³ Для удобства здесь через $\Omega_{\psi} = \langle \dot{\psi} \rangle$ обозначена разность между наблюдаемой частотой колебаний и частотой внешней силы или между наблюдаемыми частотами связанных осцилляторов.

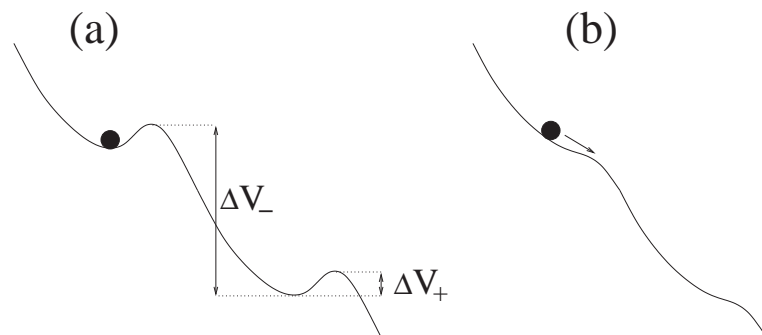


Рис. 9.1. Фаза как частица в наклонном потенциале $V(\psi)$. (a) Случай синхронизации: частица сидит в минимумах потенциала. (b) Вне области синхронизации частица скатывается вниз. Из [Pikovsky *et al.* 2000].

происходят нерегулярно.

При качественном описании процессов необходимо различать случаи ограниченного и неограниченного шума. При неограниченном (например, гауссовском) шуме возможны очень большие флуктуации, способные вызвать проскок, даже если барьер ΔV велик. В этой ситуации проскоки возникают при сколь угодно малой интенсивности шума, и при любом ненулевом ν вероятности проскока вправо и влево различны. Поэтому разность частот Ω_ψ есть монотонно убывающая функция ν и область синхронизации (область, где $\Omega_\psi = 0$) исчезает. При ограниченном шуме наблюдается другой сценарий. Теперь при малом (по сравнению с высотой барьера) шуме проскоки невозможны, и наблюдаемая разность частот в точности равна нулю. Только если барьеры малы, то наблюдаются проскоки и синхронизация в общем случае разрушается. Эти две возможности показаны на рис. 9.3.

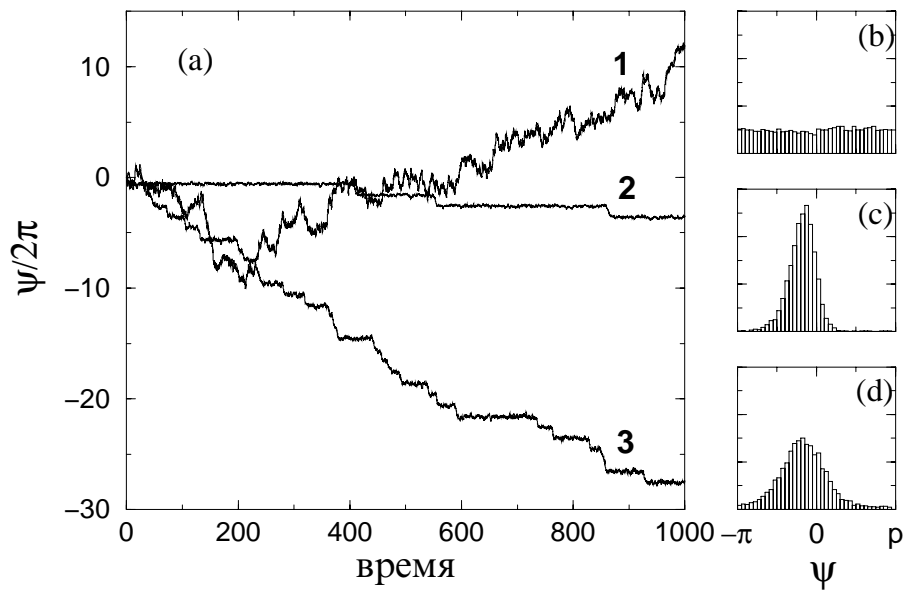


Рис. 9.2. (а) Картина ланжевеновской динамики при различных амплитуде шума σ^2 и расстройке ν . Кривая 1: диффузия фазы в «свободных» автоколебаниях ($\varepsilon = 0$). Кривая 2: малый шум и небольшая расстройка. Кривая 3: та же расстройка, что и в случае 2, но при большем шуме; проскоки происходят чаще и фаза вращается быстрее. На (b)–(d) показаны гистограммы фазы, взятой по модулю 2π для кривых 1–3. При свободной диффузии получается равномерное распределение. В остальных случаях имеется максимум вблизи устойчивого значения фазы для системы без шума. Из [Pikovsky *et al.* 2000].

Ввиду сказанного выше уместно обсудить определение понятия синхронизации в системах с шумом. Если определять синхронизацию как строгое совпадение частот и отсутствие проскоки фазы, то случай, показанный на рис. 9.3b, этому определению удовлетворять не будет. Нам представляется разумным несколько ослабить условие строгого совпадения частот, если приходится иметь дело с системами с флуктуациями, и считать ситуацию как на рис. 9.2 и 9.3a, при которой частоты очень близки, синхронной или почти синхронной.

К рассмотрению ланжевеновской динамики можно подойти и с другой стороны, задавшись вопросом: как периодическая сила влияет на флуктуации фазы. Из качественной картины рис. 9.1 ясно, что сила подавляет не только среднюю скорость частицы, но и диффузию. Постоянная диффузии может обращаться в ноль при ограниченном шуме, но даже при неограниченном гауссовском шуме она будет экспоненциально мала в центре области синхронизации – ниже мы покажем это для случая белого шума.

9.2.2 Количественное описание в случае белого шума

В этом разделе мы дадим количественное описание синхронизации в присутствии флуктуаций. Для этого необходимо рассмотреть шум с хорошими статистическими свойствами. Если он гауссовский и δ -коррелированный, то можно применить мощный метод, основанный на теории Фоккера–Планка [Стратонович 1963; Risken 1989; Gardiner 1990], поэтому мы будем во всем этом разделе предполагать шум именно таким. Среднее значение шума ξ предполагается равным нулю (иначе его можно включить в расстройку частоты

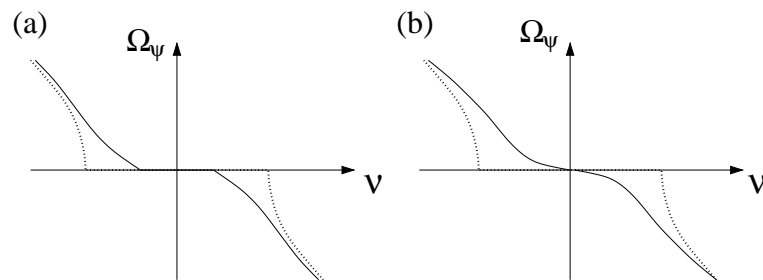


Рис. 9.3. Зависимость разности частот от расстройки для ограниченного (a) и неограниченного (b) шума. Горизонтальный участок (область синхронизации) сохраняется при малом ограниченном шуме, но исчезает при неограниченном шуме.

ν : $\nu \rightarrow \nu - \langle \xi \rangle$, его интенсивность характеризуется единственным параметром σ^2 , см. (9.5). Мы будем рассматривать стохастическое дифференциальное уравнение (9.7) в смысле Стратоновича. Тогда плотность распределения вероятности фазы $P(\psi, t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка (УФП) [Стратонович 1963; Risken 1989; Gardiner 1990]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial[(-\nu + \varepsilon q(\psi))P]}{\partial \psi} + \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2}. \quad (9.9)$$

Эквивалентная форма записи

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \psi} = 0$$

получается, если ввести поток S как

$$S = -P \frac{dV}{d\psi} - \sigma^2 \frac{\partial P}{\partial \psi}, \quad (9.10)$$

здесь V – потенциал, определенный согласно (9.8).

Будем искать стационарную (не зависящую от времени) плотность вероятности. Стационарное решение УФП (9.9) должно быть 2π -периодично по ψ , и легко проверить, что следующее выражение удовлетворяет и уравнению (9.9), и этому условию:

$$\bar{P}(\psi) = \frac{1}{C} \int_{\psi}^{\psi+2\pi} \exp\left(\frac{V(\psi') - V(\psi)}{\sigma^2}\right) d\psi'. \quad (9.11)$$

Постоянная C находится из условия нормировки $\int_0^{2\pi} \bar{P}(\psi) d\psi = 1$. Используя решение (9.11), можно найти постоянный поток вероятности S

$$S = \frac{\sigma^2}{C} (1 - e^{2\pi\nu\sigma^{-2}}),$$

который непосредственно связан со средней разностью частот Ω_ψ . Действительно, вычисляя $\langle \dot{\psi} \rangle$ по уравнению Ланжевена (9.7) и используя (9.10), получаем

$$\Omega_\psi = \langle \dot{\psi} \rangle = \langle -\nu + \varepsilon q(\psi) \rangle = \int_0^{2\pi} -\frac{dV}{d\psi} \bar{P}(\psi) d\psi = 2\pi S.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать простейший вид взаимодействия $q(\psi) = \sin \psi$. Тогда постоянные S, C выражаются через функции Бесселя комплексного порядка [Стратонович 1963], но для практических численных расчетов намного удобнее представление

решения в виде цепной дроби [Малахов 1968; Risken 1989]. Представляя $\bar{P}(\psi)$ в виде ряда Фурье

$$\bar{P} = \sum_{-\infty}^{+\infty} P_n e^{in\psi}$$

и подставляя это выражение в (9.10), получим систему бесконечного числа уравнений

$$-(in\sigma^2 + \nu)P_n + \frac{\varepsilon}{2i}(P_{n-1} - P_{n+1}) = S\delta_{n,0}. \quad (9.12)$$

Из условия нормировки следует $P_0 = 1/2\pi$, а то, что \bar{P} — действительно, означает, что $P_{-n} = P_n^*$. Переписывая (9.12) при $n > 0$ как

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{1}{(\nu + in\sigma^2)\frac{2i}{\varepsilon} + \frac{P_{n+1}}{P_n}}$$

и итерируя это соотношение, начиная с $n = 1$, получаем решение в виде быстро сходящейся (и поэтому очень удобной при численном анализе) цепной дроби

$$P_1 = \frac{(2\pi)^{-1}}{2\frac{i\nu - \sigma^2}{\varepsilon} + \frac{1}{2\frac{i\nu - 2\sigma^2}{\varepsilon} + \frac{1}{2\frac{i\nu - 3\sigma^2}{\varepsilon} + \dots}}} \quad (9.13)$$

Из (9.12) при $n = 0$ получаем соотношение между первой гармоникой P_1 и потоком S :

$$S = -\frac{\nu}{2\pi} - \varepsilon \operatorname{Im}(P_1).$$

Отсюда следует выражение для средней разности частот:

$$\Omega_\psi = -\nu - 2\pi\varepsilon \operatorname{Im}(P_1).$$

Интересно отметить, что действительная часть P_1 дает ляпуновский показатель динамики фазы. Действительно, линеаризуя (9.7) при $q(\psi) = \sin \psi$, получим

$$\frac{d\delta\psi}{dt} = \varepsilon \cos \psi \cdot \delta\psi,$$

и средний логарифм возмущения растет как

$$\lambda = \left\langle \frac{d \ln \delta\psi}{dt} \right\rangle = \varepsilon \langle \cos \psi \rangle = 2\pi \operatorname{Re}(P_1).$$

Ляпуновский показатель характеризует устойчивость фазы. При нулевом шуме ($\sigma^2 = 0$) только синхронное состояние устойчиво, в то

время как в квазипериодическом состоянии ляпуновский показатель обращается в ноль. При $\sigma^2 > 0$ качественное различие между этими режимами исчезает: ляпуновский показатель отрицателен при всех расстройках ν .

Зависимость средней разности частот и ляпуновского показателя от параметров представлена на рис. 9.4. (Из выражения (9.13) видно, что величина P_1 зависит фактически только от двух параметров ν/ε и σ^2/ε , поэтому мы зафиксировали ε и показываем на рис. 9.4 однопараметрическое семейство кривых.) В пределе $\sigma^2 \rightarrow 0$ получается чисто детерминированное решение, такое же, как в главе 7. Шум размывает горизонтальный участок в зависимости разности частот Ω_ψ от расстройки ν , хотя при малой его интенсивности изменения в центре области синхронизации экспоненциально малы.

Ляпуновский показатель всегда отрицателен, как в области синхронизации вокруг $\nu = 0$, так и в области, где детерминированная динамика квазипериодическая. Таким образом, динамика фазы устойчива по отношению к возмущениям начальных условий. Это приводит к возможности синхронизовать идентичные осцилляторы, воздействуя на них общим шумом (см. раздел 15.2).

Довольно полное статистическое описание динамики фазы можно дать в случае слабого шума [Стратонович 1963]. В этом случае про-

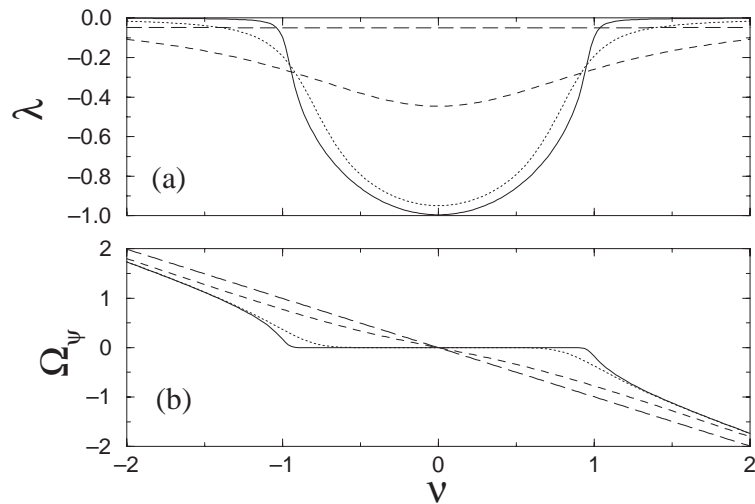


Рис. 9.4. Ляпуновский показатель (а) и средняя частота (б) автоколебаний с шумом и внешней силой при $\varepsilon = 1$ и различных амплитудах шума (сплошная линия: $\sigma^2 = 0.01$; пунктир: $\sigma^2 = 0.1$; штриховая линия: $\sigma^2 = 1$; длинные штрихи: $\sigma^2 = 10$).

скоки фазы редки и их можно рассматривать как редкие изолированные события, длительность которых много меньше интервала между ними (см. кривую 2 на рис. 9.2). Динамику фазы можно представить как последовательность независимых $+2\pi$ и -2π скачков. Поскольку предыдущий скачок быстро «забывается», весь процесс можно аппроксимировать пуассоновским и охарактеризовать единственным параметром – частотой скачков. Если расстройка ν не равна нулю, то частоты скачков в положительном и отрицательном направлениях, G_+ и G_- , различны. Средняя разность частот колебаний выражается через частоты скачков как средняя скорость дрейфа фазы

$$\Omega_\psi = 2\pi(G_+ - G_-),$$

а дисперсия распределения фазы

$$\langle(\psi - \langle\psi\rangle)^2\rangle = (2\pi)^2(G_+ + G_-)t$$

дает постоянную диффузии. Приведенные выше формулы следуют из того, что числа скачков в положительном (отрицательном) направлении в течение промежутка времени t есть случайные числа со средним $G_\pm t$ и дисперсией $G_\pm t$ (процесс пуассоновский!); поскольку положительные и отрицательные скачки статистически независимы, средние и дисперсии можно просто складывать. Точные выражения для G_\pm приведены в книге Стратоновича [1963], они получаются как средние времена, за которые броуновская частица преодолевает барьеры потенциала. Диффузия через барьер при слабом шуме задается известной формулой Крамерса [Risken 1989; Gardiner 1990], согласно которой вероятность преодолеть барьер экспоненциально зависит от его высоты (см. рис. 9.1):

$$G_\pm \propto \exp\left(\frac{-\Delta V_\pm}{\sigma^2}\right).$$

В типичном случае одна из вероятностей перехода много больше другой, при этом наблюдается последовательность проскоков фазы, для которой разность частот и постоянная диффузии случайных блужданий фазы – величины одного порядка. Только в центре области синхронизации, где потенциальные барьеры ΔV_\pm равны и средняя разность частот Ω_ψ равна нулю, наблюдаются случайные блуждания, в которых скачки в положительном и отрицательном направлениях происходят с равной вероятностью. В этом случае постоянная диффузии экспоненциально мала при стремящейся к нулю интенсивности шума.

9.2.3 Синхронизация квазигармонической флуктуирующей силой

Ниже мы обсудим автоколебания под действием квазигармонической (узкополосной) стохастической силы. Подобная задача естественным образом возникает для систем фазовой автоподстройки (раздел 7.5). Действительно, если сигнал, несущий определенную информацию, необходимо демодулировать, используя эффект синхронизации, то ясно, что этот сигнал нельзя рассматривать как чисто периодический, а необходимо считать сигналом с медленно меняющейся амплитудой и частотой. Как обычно в теории передачи информации, эти изменения можно считать случайными, но относительно медленными (по сравнению с периодом колебаний). Такой подход как раз и приводит к задаче синхронизации узкополосным случайным сигналом.

Поскольку модуляция частоты и амплитуды медленная, можно использовать основную модель для фазовой динамики (9.6), в которой расстройку ν и амплитуду ε следует считать случайными функциями времени:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu(t) + \varepsilon(t)q(\psi). \quad (9.14)$$

При дальнейшем анализе флуктуаций мы будем предполагать изменения ν и ε малыми. Тогда можно записать

$$\nu = \nu_0 + \Delta\nu(t), \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon(t), \quad \psi = \psi_0 + \Delta\psi(t).$$

Предполагая далее простейшую форму нелинейного члена $q(\psi) = -\sin \psi$, получаем после линеаризации

$$\frac{d\Delta\psi}{dt} = -\sqrt{\varepsilon_0^2 - \nu_0^2} \Delta\psi + \Delta\nu(t) + \frac{\nu_0}{\varepsilon_0} \Delta\varepsilon(t).$$

Из этого линейного уравнения можно выразить спектр мощности процесса $\Delta\psi(t)$ через спектры $\nu(t)$ и $\varepsilon(t)$, если предположить статистическую независимость флуктуаций частоты и амплитуды:

$$S_\psi(\zeta) = \frac{S_\nu(\zeta) + \nu_0^2 \varepsilon_0^{-2} S_\varepsilon(\zeta)}{\varepsilon_0^2 - \nu_0^2 + \zeta^2}.$$

Эта формула (ср. с [Ланда 1980]) показывает, что флуктуации фазы остаются ограниченными в центре области синхронизации ($|\nu_0| < |\varepsilon_0|$) и расходятся на ее краях. Следовательно, при заданных статистических характеристиках модуляции существует область, где проскоки фазы не наблюдаются, аналогично ситуации, представленной

на рис. 9.3а. В контексте фазовой автоподстройки это означает почти идеальную демодуляцию входного сигнала. Вблизи границ области синхронизации проскоки неизбежны – здесь система работает с ошибками.

Напомним читателю, что переменная ψ есть разность фаз автоколебаний и внешней силы (см. (7.22)), поэтому захват фазы узкополосным сигналом не приводит к подавлению ее диффузии: фаза автоколебаний просто повторяет случайные изменения фазы внешней силы.

9.2.4 Взаимная синхронизация автоколебаний с шумом

Мы рассматривали влияние шума на синхронизацию автоколебаний периодическим воздействием. Как уже отмечалось в главе 8, уравнения для разности фаз двух связанных осцилляторов имеют точно такой же вид. Поэтому поведение разности фаз двух осцилляторов с шумом описывается изложенной выше теорией. Однако в случае двух осцилляторов представляет интерес не только разность фаз. Во многих приложениях (например там, где осцилляторы используются в качестве часов) важно качество колебаний, т.е. постоянные диффузии каждой из фаз.

Здесь мы покажем, как связь может подавить диффузию фаз. Рассмотрим, следуя Малахову [1968], синхронизацию двух автоколебательных систем с шумом в фазовом приближении:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= \omega_1 + \varepsilon_1 \sin(\phi_2 - \phi_1) + \xi_1, \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2 + \varepsilon_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) + \xi_2.\end{aligned}$$

Ниже интенсивности флуктуаций

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2\sigma_i^2 \delta_{ij} \delta(t - t')$$

и параметры связи считаются различными, а частоты одинаковыми: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Для разности фаз $\psi = \phi_1 - \phi_2$ и для их «суммы» $\theta = \varepsilon_2 \phi_1 + \varepsilon_1 \phi_2$ получаем

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sin \psi + \xi_1 - \xi_2, \\ \dot{\theta} &= \varepsilon_2 \xi_1 + \varepsilon_1 \xi_2 + \omega(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).\end{aligned}$$

Уравнение для ψ описывает взаимную синхронизацию осцилляторов, оно эквивалентно уравнению (9.7). Это означает, что для разности фаз применима развитая выше в разделе 9.2 теория. Не

повторяя ее здесь, отметим только, что диффузия разности фаз ψ экспоненциально мала при сильной связи. В противоположность этому, для переменной θ нет возвращающей силы, и она демонстрирует случайные блуждания с постоянной диффузии

$$D_\theta = 2(\varepsilon_2^2 \sigma_1^2 + \varepsilon_1^2 \sigma_2^2),$$

в которую вносят вклад обе случайных силы.

Представляя фазы автоколебаний как

$$\phi_1 = \frac{\varepsilon_1 \psi + \theta}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad \phi_2 = \frac{-\varepsilon_2 \psi + \theta}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

и пренебрегая разностью фаз ψ по сравнению с суммой θ (это можно сделать, поскольку постоянные диффузии этих величин сильно различаются), получим для фаз осцилляторов равные постоянные диффузии

$$D_1 = D_2 = D = 2(\varepsilon_1^2 \sigma_2^2 + \varepsilon_2^2 \sigma_1^2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^{-2}. \quad (9.15)$$

Эту общую постоянную диффузии нужно сравнить с величинами, характеризующими невзаимодействующие автоколебания:

$$D_1^0 = 2\sigma_1^2, \quad D_2^0 = 2\sigma_2^2.$$

Рассмотрим сначала случай однонаправленной связи: $\varepsilon_1 = 0$. Тогда $D = 2\sigma_1^2 = D_1^0$: качество синхронизованного режима такое же, как у вынуждающей системы. Флуктуации во втором осцилляторе, вызванные шумом ξ_2 , подавлены вследствие синхронизации. Поэтому, если качество первого осциллятора выше, то он может улучшить второй: этот эффект применяется для получения мощных качественных колебаний. Исследуя формулу (9.15), можно увидеть, что даже при взаимной связи возможно увеличение качества колебаний, если влияние более качественного осциллятора (т.е. осциллятора с меньшим шумом σ^2) сильнее, чем влияние менее качественного. Например, если первый осциллятор качественнее (т.е. $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$) и его влияние сильнее (т.е. $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$), то получающаяся постоянная диффузии уменьшается и качество колебаний возрастает.

9.3 Библиографические заметки

Теория синхронизации в осцилляторах с шумом была развита уже к 1960-м годам и описана в книгах [Стратонович 1963; Малахов 1968; Ланда 1980; Risken 1989]. В последние годы в основном исследовались ансамбли осцилляторов и хаотические системы, мы приводим соответствующие ссылки в главах 10 и 12.

Глава 10

Фазовая синхронизация хаотических систем

К настоящему моменту мы рассмотрели синхронизацию периодических осцилляторов, также и при наличии шума, и описали эффекты захвата фаз и частот. В этой главе мы обсудим аналогичные эффекты в хаотических системах. Основная идея состоит в том, что, по крайней мере для некоторых систем, хаотический сигнал может рассматриваться как колебания с хаотически модулированной амплитудой и более или менее равномерно вращающейся фазой. Средняя скорость этого вращения определяет характерный «период» хаотической системы, который может быть подстроен за счет воздействия слабой силы или слабого взаимодействия с другим осциллятором. Таким образом, мы ожидаем, что захват фаз и частот может наблюдаться и для систем этого класса. Важно отметить, что динамика амплитуд остается хаотической и практически неизменной воздействием/взаимодействием.

Эффекты, обсуждаемые в этой главе, были изначально названы «фазовая синхронизация», чтобы отличить их от других явлений в связанных (подверженных действию силы) хаотических системах (эти явления рассматриваются в части III). Так как содержание этой главы есть естественное развитие теории, изложенной в предыдущих разделах, то мы в дальнейшем называем описанные здесь эффекты просто синхронизацией.

В следующем разделе мы вводим понятие фазы для хаотических систем. Далее, мы представляем эффекты захвата фазы хаотических

осцилляторов и обсуждаем их со статистической и топологической точек зрения. Мы рассматриваем как захват хаотического осциллятора периодической силой, так и взаимную синхронизацию двух неидентичных хаотических систем. Наше изложение предполагает, что читатель знаком с основами теории хаоса.

10.1 Фаза хаотического осциллятора

10.1.1 Понятие фазы

Первая проблема в распространении основных идей теории синхронизации на случай хаотических автоколебательных систем состоит в том, чтобы ввести для этих систем понятие фазы. Для периодических колебаний мы определили фазу как переменную, параметризующую движение по предельному циклу и растущую пропорционально времени (см. раздел 7.1). Введенная таким способом фаза вращается равномерно и соответствует нейтрально устойчивому (т.е. имеющему нулевой ляпуновский показатель) направлению в фазовом пространстве. Наша цель – обобщить это определение таким образом, чтобы:

- (i) оно правильно давало фазу для периодических орбит (и, следовательно, удовлетворяло очевидному требованию включать в себя старый случай) и давало разумные результаты для многооборотных периодических орбит, вложенных в хаотический аттрактор;¹
- (ii) оно давало фазу, соответствующую сдвигу изображающей точки вдоль потока, а, следовательно, и нулевому ляпуновскому показателю;
- (iii) получаемая фаза имела ясный физический смысл и могла быть легко вычислена.

По-видимому, не существует общего и строгого способа удовлетворить эти требования для произвольной хаотической системы. Мы представляем здесь подход, который, по крайней мере частично, отвечает сформулированным выше условиям.

¹ Напомним читателю, что хаотическое движение может быть представлено как последовательность движений вдоль неустойчивых периодических орбит (НПО), вложенных в странный аттрактор; обсуждение и ссылки даны в разделе 10.2. Свойства фазы в терминах НПО рассмотрены в разделе 10.2.3.

Предположим, что мы можем сконструировать отображение Пуанкаре для автономной хаотической системы с непрерывным временем, т.е. мы можем выбрать секущую поверхность так, что она трансверсально пересекается всеми траекториями хаотического (странного) аттрактора. Тогда для каждого отрезка траектории между двумя пересечениями с поверхностью мы определим фазу как линейную функцию времени, так что фаза возрастает на 2π с каждым возвращением на секущую поверхность:

$$\phi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t < t_{n+1}. \quad (10.1)$$

Здесь t_n — это время n -ого пересечения секущей поверхности. Очевидно, что это определение неоднозначно, так как оно существенно зависит от выбора сечения Пуанкаре. Тем не менее, введенная таким способом фаза удовлетворяет перечисленным выше требованиям.

- (i) Для периодической траектории, которая только один раз пересекает секущую поверхность, фаза (10.1) полностью соответствует уравнению (7.3). Это не верно для периодических орбит, имеющих несколько пересечений с поверхностью: для таких траекторий фаза (10.1) есть кусочно-линейная функция времени. Для каждой конкретной периодической траектории можно выбрать малый участок секущей поверхности вокруг нее и определить фазу, удовлетворяющую уравнению (7.3), но это невозможно сделать глобально, т.е. для всех периодических орбит. Важно отметить, что для периодической орбиты с периодом T набег фазы в соответствии с уравнением (10.1) равен $\phi(T) - \phi(0) = 2\pi\mathcal{N}$, где \mathcal{N} — число пересечений орбиты с секущей поверхностью. Следовательно, приведенное определение фазы дает правильное значение для частоты (и поэтому мы считаем это определение разумным). Отметим, что \mathcal{N} есть не что иное, как период соответствующей орбиты отображения Пуанкаре; мы называем его топологическим периодом (это понятие важно для раздела 10.2).
- (ii) Локально фаза (10.1) пропорциональна времени, поэтому ее возмущения не нарастают и не убывают. Следовательно, фаза (10.1) соответствует нулевому ляпуновскому показателю.
- (iii) Фаза (10.1) учитывает «обороты» хаотического осциллятора, где обороты определяются выбором отображения Пуанкаре: каждая итерация отображения эквивалентна одному «периоду»

системы с непрерывным временем. Такую фазу легко вычислить; более того, если нас интересует только описание динамики в терминах захвата частот, то мы можем просто вычислить (среднюю) частоту как число возвратов к секущей Пуанкаре (т.е. число «периодов») за единицу времени.

Фаза является важной компонентой часто используемого в нелинейной динамике сведения системы с непрерывным временем к дискретному отображению Пуанкаре (см., например, уравнения (10.7) и (10.8) ниже). В математической литературе обычно идут другим путем: начав с отображения, переходят к непрерывному времени, используя конструкцию специального потока [Корнфельд и др. 1982].

Чтобы не быть слишком абстрактными, проиллюстрируем этот подход двумя моделями – основными прототипами нелинейной динамики, а именно, осцилляторами Рёсслера [Rössler 1976] и Лоренца [Lorenz 1963]. Оба являются трехмерными диссипативными системами со странным аттрактором.

Простой случай: система Рёсслера

Динамика системы Рёсслера

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + 0.15y, \\ \dot{z} &= 0.4 + z(x - 8.5),\end{aligned}\tag{10.2}$$

показана на рис. 10.1. Временные зависимости $x(t)$ и $y(t)$ могут рассматриваться как «почти синусоидальные» хаотически модулированные колебания, в то время как $z(t)$ есть хаотическая последовательность импульсов. Подходящим выбором секущей Пуанкаре для вычисления фазы в соответствии с уравнением (10.1) может быть, например, полуплоскость $y = 0$, $x < 0$. Проекция фазового портрета на плоскость (x, y) выглядит размытым предельным циклом с хорошо определенными вращениями вокруг начала координат. В этом и подобных случаях можно также ввести угловую переменную θ путем перехода к полярным координатам (с центром, совпадающим с центром вращения, ср. с [Goryachev and Kapral 1996; Pikovsky *et al.* 1996]):

$$\theta = \tan^{-1}(y/x).\tag{10.3}$$

Угловая переменная θ может рассматриваться как легко вычисляемая оценка фазы ϕ ; для данного примера различие между θ и ϕ пренебрежимо мало [Pikovsky *et al.* 1996].

Отметим, что хотя фаза ϕ и подобная фазе переменная θ не совпадают микроскопически (т.е. на масштабах времени меньших характерного периода колебаний, см. рис. 10.3), они дают одинаковые средние частоты: частота, определенная как среднее по времени от $\langle d\theta/dt \rangle$, совпадает с непосредственным определением средней частоты как среднего числа пересечений секущей Пуанкаре за единицу времени. Фаза может быть также определена по «колебательной» наблюдаемой (как x , так и y одинаково подходят для этой цели) и с помощью метода аналитического сигнала, основанного на преобразовании Гильберта; этот метод особенно полезен для экспериментальных приложений (см. подробнее главу 6 и приложение П2).

Нетривиальный случай: система Лоренца

Странный аттрактор системы Лоренца

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(y - x), \\ \dot{y} &= 28x - y - xz, \\ \dot{z} &= -8/3 \cdot z + xy,\end{aligned}\tag{10.4}$$

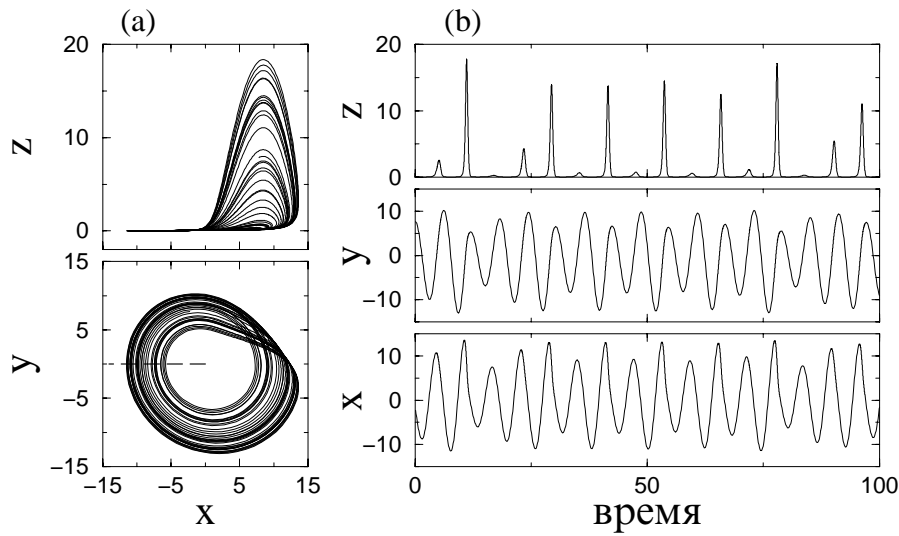


Рис. 10.1. Динамика системы Рёсслера (уравнения (10.2)). (а) Проекция странного аттрактора на плоскости (x, y) и (x, z) . Пунктирной линией показана секущая Пуанкаре, используемая далее для вычисления фазы (см. рис. 10.5). (б) Временные зависимости переменных x, y, z . Процессы $x(t)$ и $y(t)$ могут быть в хорошем приближении рассмотрены как колебания с хаотически модулированной амплитудой.

показанный на рис. 10.2, топологически отличается от аттрактора Рёсслера. Переменная $z(t)$ демонстрирует характерные хаотически модулированные колебания, в то время как $x(t)$ и $y(t)$ демонстрируют дополнительно переключения с очевидной симметрией $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ уравнений Лоренца. Колебания z достаточно регулярны, переключения же таковыми не являются. Чтобы устранить сложности, возникающие за счет наложения колебаний и переключений, введем симметризованную наблюдаемую $u(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$ и спроецируем фазовый портрет на плоскость (u, z) , рис. 10.3. В этой проекции фазовый портрет напоминает портрет аттрактора Рёсслера, и фаза может быть введена сходным образом. Возможно, например, следующее сечение Пуанкаре: $z = 27$, $u > 12$. Или же, можно ввести угловую переменную $\theta(t)$, выбрав точку $u_0 = 12$, $z_0 = 27$ на плоскости рис. 10.3 в качестве начала координат, и вычислив

$$\theta = \tan^{-1}((z - z_0)/(u - u_0)). \quad (10.5)$$

Как и прежде, угловая переменная дает ту же среднюю частоту, что и фаза, полученная из отображения Пуанкаре.

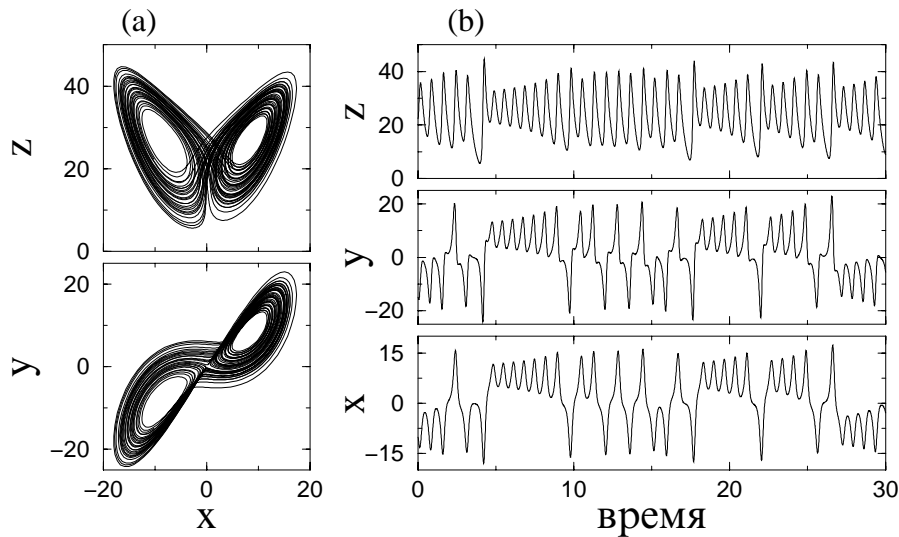


Рис. 10.2. Динамика системы Лоренца (уравнения (10.4)). (а) Проекция фазового портрета на плоскости (x, y) и (x, z) . Ни одна из этих проекций не демонстрирует вращений вокруг единого центра. (б) Временные зависимости переменных x, y, z . Только $z(t)$ выглядит как модулированные колебания; в $x(t)$ и $y(t)$ видна комбинация колебаний и скачков, сопровождаемых сменой знака.

Ограничения метода

Следует подчеркнуть, что описанный подход достаточно ограничен, и для многих хаотических систем мы не можем должным образом определить фазу или угловую переменную. Для примера мы опять рассмотрим систему Рёсслера, но на этот раз выберем значения параметров, отличные от использованных в (10.2), и рассмотрим уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + 0.3y, \\ \dot{z} &= 0.4 + z(x - 7.5).\end{aligned}\tag{10.6}$$

При таких параметрах система имеет так называемый аттрактор-воронку (funnel attractor), показанный на рис. 10.4. На плоскости (x, y) трудно найти линию, которая пересекалась бы трансверсально всеми траекториями. Другими словами, в сигналах $x(t), y(t)$ мы видим малые и большие колебания, и трудно понять, что именно может быть рассмотрено в качестве цикла, и, соответственно, какому отрезку сигнала может быть приписан набег фазы 2π . Система Рёсслера с аттрактором-воронкой является, вероятно, простейшим примером системы с плохо определенной фазой. В общем случае, мы можем ожидать, что понятие фазы едва ли может быть использовано

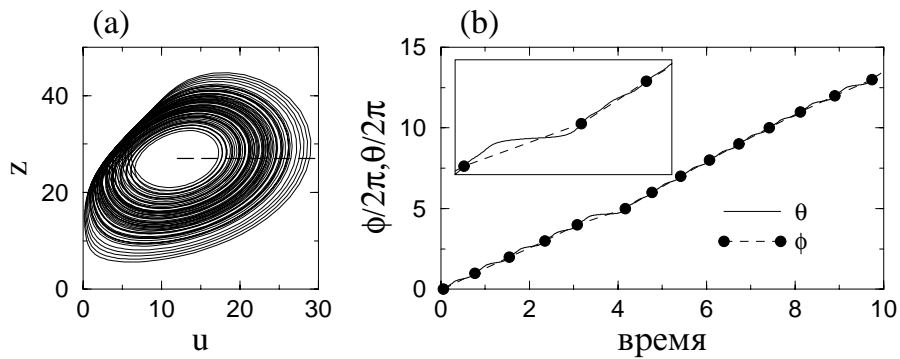


Рис. 10.3. (а) Портрет системы Лоренца в переменных u, z выглядит как размытый предельный цикл с вращениями вокруг неустойчивой особой точки системы. Пунктирная линия показывает секущую поверхность $z = 27, u > 12$. (б) Эволюция фазы ϕ , вычисленной по сечению Пуанкаре (уравнение (10.1), пунктир) и угловой переменной θ (уравнение (10.5), сплошная линия). Они совпадают в точках (символ \bullet) пересечения секущей поверхности, и слегка различаются на временах, меньших характерного периода возврата (см. врезку в (б)).

в случае высокоразмерного хаоса, когда сосуществуют колебания со многими различными характерными временами.

Сделаем еще одно замечание. Мы хотим ввести фазу как переменную, соответствующую нулевому ляпуновскому показателю системы. Нулевой показатель существует для всех автономных динамических систем с непрерывным временем (если аттрактором не является состояние равновесия), и во всех таких системах есть возможность сделать малый или большой сдвиг вдоль траектории, так что такое возмущение не будет ни возрастать, ни убывать. Именно это свойство и важно для синхронизации, так как делает возможным подстройку фаз двух систем (или же фазы одного осциллятора к фазе внешней силы). Динамические системы с дискретным временем в общем случае не имеют нулевого ляпуновского показателя, независимо от типа аттрактора (периодический или хаотический). Действительно, для орбиты с дискретным временем мы не можем совершить малый сдвиг вдоль траектории, а только большой. Следовательно, понятие фазы в этом случае неприменимо. То же самое верно для систем с непрерывным временем, но неавтономных. Так, например, хаотиче-

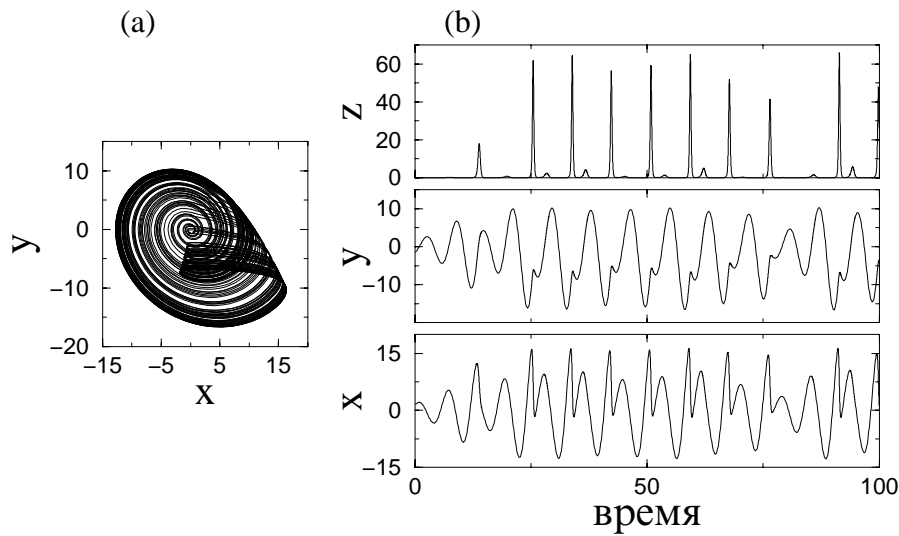


Рис. 10.4. Динамика системы Рёслера с аттрактором-воронкой (10.6). (а) Проекция фазового портрета на плоскость (x, y) . Видны две характерные петли, соответствующие большим и малым колебаниям. (б) Временные зависимости переменных x, y, z . Колебания x и y имеют сложную форму, поэтому фаза и амплитуда не могут быть определены однозначно.

ское поведение может демонстрироваться нелинейным осциллятором под действием периодической внешней силы, т.е. системой вида

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + F(x) = \varepsilon \cos \omega t.$$

В общем случае такие системы не имеют устойчивого направления и все их ляпуновские показатели – ненулевые. Можно сказать, что вынужденные колебания $x(t)$ подстроены по фазе к внешней силе и неинвариантны по отношению к малым сдвигам по времени. Следует, однако, помнить, что для случайной (шумовой) силы свойство нейтральности к возмущениям может существовать в статистическом смысле; см. обсуждение стохастического резонанса в части I (раздел 3.6.3).

10.1.2 Фазовая динамика хаотических осцилляторов

В отличие от случая периодических систем, мы не можем ожидать, что фаза хаотической системы будет возрастать равномерно. Наоборот, в общем случае мгновенная частота зависит от амплитуды. Воспользуемся определением фазы, основанном на отображении Пуанкаре (уравнение (10.1)); тогда фазовая динамика может быть описана следующим образом

$$A_{n+1} = \mathcal{M}(A_n), \quad (10.7)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega(A_n) \equiv \omega_0 + F(A_n). \quad (10.8)$$

В качестве амплитуды A_n возьмем набор координат точки на секущей поверхности; он не изменяется во время роста фазы от $2\pi n$ до $2\pi(n+1)$ и может быть рассмотрен в дискретном времени; преобразование \mathcal{M} определяет отображение Пуанкаре. Эволюция фазы подчиняется уравнению (10.1); «мгновенная» частота $\omega(A_n) = 2\pi/T_n$ определяется временем возврата Пуанкаре $T_n = t_{n+1} - t_n$ и в общем случае зависит от положения на секущей поверхности, т.е. от амплитуды. Предполагая хаотическое поведение амплитуд, мы можем рассматривать член $\omega(A_n)$ как сумму средней частоты ω_0 и некоторого эффективного «шума» $F(A)$ (хотя этот нерегулярный член имеет чисто детерминированное происхождение); в исключительных случаях $F(A)$ может исчезать.

Ключевым является наблюдение, что уравнение (10.8) сходно с уравнением (9.2), описывающим эволюцию фазы периодического осциллятора в присутствии внешнего шума. Таким образом, динамика фазы в общем случае диффузионная (ср. с (9.4)), и фаза совершает

случайные блуждания. Постоянная диффузии D (см. (9.4)) определяет фазовую когерентность хаотических колебаний. Грубо говоря, D пропорциональна ширине пика спектра мощности на частоте ω_0 для типичной наблюдаемой хаотической системы. Для аттрактора Рёсслера постоянная диффузии очень мала ($D < 10^{-4}$), что соответствует очень острому пику в спектре; этот осциллятор поэтому часто называют фазо-когерентным. Для аттрактора Лоренца спектральный пик значительно шире, и постоянная диффузии не очень мала, $D \approx 0.2$. Следовательно, можно ожидать, что фазовая динамика системы Рёсслера близка к динамике периодического осциллятора, в то время как эффективным шумом в системе Лоренца пренебречь нельзя и, следовательно, последняя ведет себя как периодическая система, возмущаемая довольно сильным шумом.

Мы иллюстрируем свойства когерентности аттракторов Рёсслера и Лоренца на рис. 10.5, где изображены времена возврата T_n , или «период» вращений. Для осциллятора Рёсслера вариация T_n сравнительно мала, в то время как для осциллятора Лоренца время возврата T_n может быть произвольно велико (это соответствует медленным движениям в окрестности седла $x = y = z = 0$). Ниже мы покажем, что это различие и определяет различие в свойствах синхронизации этих двух систем.

В заключение можно сказать, что мы ожидаем, что эффекты

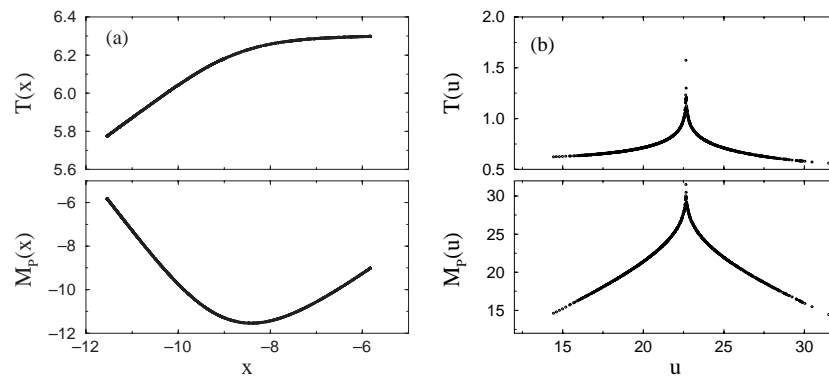


Рис. 10.5. Времена возврата и отображения Пуанкаре для аттракторов систем (а) Рёсслера (уравнения (10.2)) и (б) Лоренца (уравнения (10.4)); соответствующие секущие поверхности показаны на рис. 10.1 и 10.3. Графики выглядят как функции одной переменной, хотя на самом деле – это проекции двумерных функций (внутренняя канторовская структура очень тонка и едва заметна; поэтому мы сохраняем те же обозначения $M(\cdot)$ для отображения). Время возврата для системы Лоренца имеет логарифмическую сингулярность при $u \approx 23$.

синхронизации для хаотических систем будут сходны с соответствующими эффектами в периодических осцилляторах с шумом. Тем не менее, необходимо иметь в виду, что «шумовой» член $F(A)$ вряд ли может быть вычислен в явном виде и наверняка не может быть рассмотрен как гауссовский δ -коррелированный шум, как это обычно предполагается при статистическом рассмотрении зашумленных осцилляторов (см. главу 9).

10.2 Синхронизация хаотических осцилляторов

В этом разделе мы описываем свойства синхронизации хаотических систем, для которых фаза хорошо определена и может быть непосредственно вычислена. Следовательно, синхронизация (называемая *фазовой синхронизацией*, чтобы отличать ее от других типов синхронизации в хаотических системах, рассматриваемых в части III) может прямо характеризоваться как захват фаз и частот. Средняя наблюдаемая частота осциллятора легко вычисляется как

$$\Omega = \lim_{t \rightarrow \infty} 2\pi \frac{N_t}{t}, \quad (10.9)$$

где N_t – число пересечений фазовой траектории с сечением Пуанкаре за время наблюдения t . Этот метод применим и к временному ряду; в простейшем случае в качестве N_t можно взять, например, число максимумов подходящей колебательной наблюдаемой ($x(t)$ для системы Рёсслера и $z(t)$ для системы Лоренца).

Аналогично случаю периодических колебаний, опишем синхронизацию периодической внешней силой и взаимную синхронизацию связанных систем. Далее мы обсудим как синхронизация внешней периодической силой может быть охарактеризована косвенно, т.е. без непосредственного вычисления фазы. Такое описание, независимое от определения фазы, годится также для изучения хаотических систем с плохо определенной фазой.

10.2.1 Фазовая синхронизация внешней силой

Система Рёсслера

Мы начнем с модели Рёсслера (10.2) и добавим периодическую внешнюю силу в уравнение для x :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z + \varepsilon \cos \omega t, \\ \dot{y} &= x + 0.15y, \\ \dot{z} &= 0.4 + z(x - 8.5).\end{aligned}\tag{10.10}$$

Вычисляя наблюдаемую частоту Ω в зависимости от параметров внешней силы, мы получим показанное на рис. 10.6 плато, где $\Omega = \omega$. Этот график очень похож на обычный график для основной области синхронизации периодических осцилляторов. Примечательно, что довольно малая сила может захватить частоту, почти не влияя на амплитуду. Для иллюстрации этого покажем на рис. 10.7 стробоскопическое (с периодом внешней силы) изображение фазовой плоскости (x, y) . Внутри области синхронизации точки сконцентрированы по фазе и распределены по амплитуде; в асинхронном состоянии наблюдается широкое распределение, как по фазе, так и по амплитуде.

Результаты, представленные на рис. 10.6 и 10.7, показывают, что даже слабая периодическая сила может захватить фазу хаотического осциллятора точно так же, как она захватывает фазу периодического. Влияние на амплитуду относительно мало: сила не подавляет хаос. Это видно также из вычислений показателей Ляпунова.

Максимальный ляпуновский показатель остается в основном положительным (за исключением неизбежных периодических окон) во всем диапазоне параметров рисунка 10.6. Вне области синхронизации второй ляпуновский показатель является практически нулевым, в то время как внутри области он отрицателен. Следовательно, второй ляпуновский показатель имеет те же свойства, что и максимальный показатель системы с периодическими колебаниями. Это демонстрирует относительную независимость амплитудной динамики от фазо-

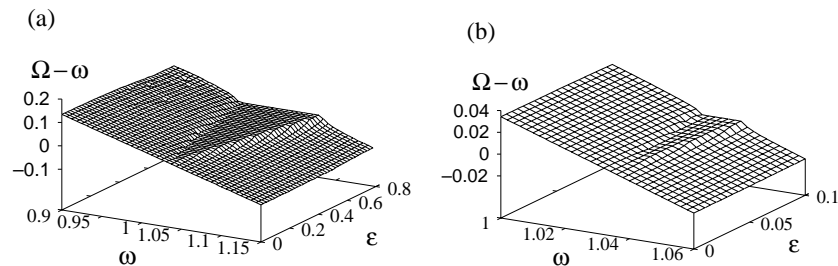


Рис. 10.6. Синхронизация в системе Рёсслера (10.10). (а) Разность наблюдаемой частоты и частоты внешней силы как функция амплитуды и частоты внешней силы. (б) Растяжение области малой амплитуды силы демонстрирует, что порог синхронизации очень мал; это означает, что влияние хаотической амплитуды на фазовую динамику очень слабо (эффективный шум очень мал).

вой для малой внешней силы.

Система Лоренца

Рассмотрим теперь систему Лоренца с периодической внешней силой, действующей на колебательную переменную z :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - x), \\ \dot{y} &= 28x - y - xz, \\ \dot{z} &= -8/3 \cdot z + xy + \varepsilon \cos \omega t. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Эффективный шум в системе Лоренца значительно больше, чем в рёслеровской, и захват фазы не идеален. Зависимость разности наблюдаемой частоты и частоты внешней силы $\Omega - \omega$ от ω (рис. 10.8) демонстрирует плато, где $\Omega \approx \omega$, но точный захват частот $\Omega = \omega$ не наблюдается.

Чтобы детально проиллюстрировать синхронизацию системы Лоренца (см. [Е.-Н. Park *et al.* 1999; Zaks *et al.* 1999]), изобразим на рис. 10.9а временную зависимость угловой переменной θ , определенной в соответствии с уравнением (10.5). Мы наблюдаем захват внешней силой на больших интервалах времени, но эти интервалы перемежаются проскоками фазы. Этим фазовая динамика системы

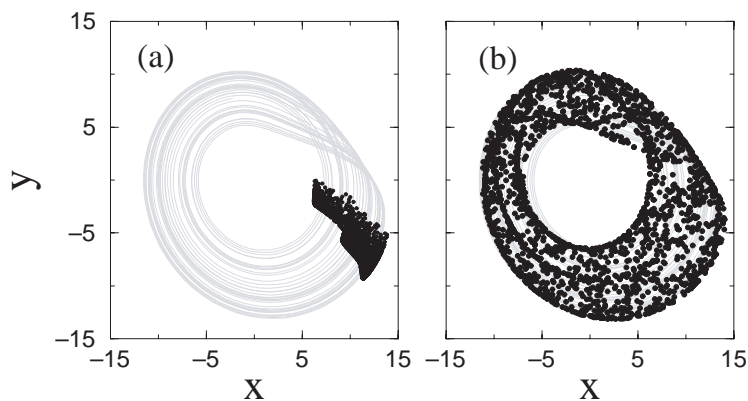


Рис. 10.7. Стробоскопическое изображение системы Рёслера под действием внешней силы. (а) Внутри области синхронизации фазы сконцентрированы в небольшой области ($\varepsilon = 0.16$, $\omega = 1.04$). (б) В асинхронном состоянии ($\varepsilon = 0.16$, $\omega = 1.1$) фазы разбросаны. Автономный аттрактор показан серым фоном. Возможна эквивалентная интерпретация данного графика. Он может рассматриваться как распределение состояний ансамбля идентичных систем Рёслера, на которые действует общая сила.

Лоренца напоминает динамику периодического осциллятора, возмущенного неограниченным шумом: проскоки фазы наблюдаются при любой расстройке.² Отличие от случая гауссовского шума состоит в

² Отметим, что фазовая динамика системы Рёслера может рассматриваться как аналогичная фазовой динамике периодического осциллятора с ограниченным шумом: нерегулярные по времени проскоки фазы наблюдаются только на границе области синхронизации, но не возникают в ее середине.

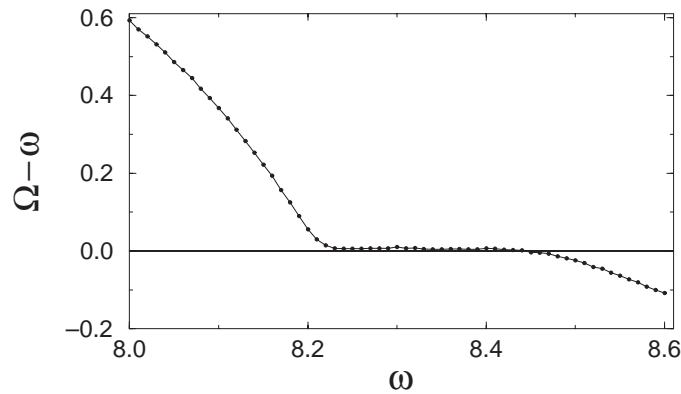


Рис. 10.8. Синхронизация в системе Лоренца: наблюдаемая частота как функция частоты внешней силы для относительно большой амплитуды силы $\varepsilon = 10$. В области плато $8.2 < \omega < 8.5$ есть небольшое рассогласование $\Omega - \omega \approx 0.005$ за счет проскоков фазы (см. рис. 10.9).

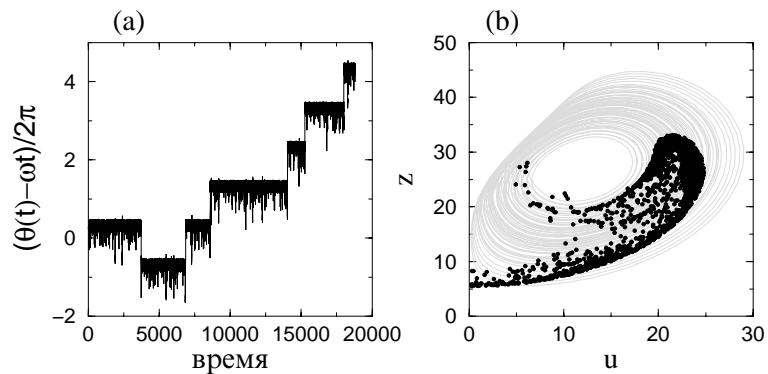


Рис. 10.9. Неидеальная синхронизация системы Лоренца для $\varepsilon = 10$, $\omega = 8.35$. (a) Разность фаз как функция времени: длинные интервалы захвата перемежаются проскоками. (b) Стробоскопический портрет системы с внешней силой. Автономный аттрактор показан серым фоном.

том, что вероятность проскока в положительном направлении больше чем в отрицательном, что и приводит к отклонению наблюдаемой частоты Ω от ω . Эта специфическая черта системы Лоренца следует из отображения Пуанкаре и распределения времен возврата, показанных на рис. 10.5b. Можно видеть, что возможна длительная последовательность итераций с малыми u ($u \approx 15$), при которых времена возврата малы. В течение этих итераций фаза осциллятора убегает вперед, так что наблюдаемая частота немного превышает частоту силы (см. подробнее в [Е.-Н. Park *et al.* 1999; Zaks *et al.* 1999]).

Фазовая динамика системы Лоренца с внешней силой проиллюстрирована стробоскопическим портретом на рис. 10.9b: большинство точек сконцентрировано в малой части фазового пространства, хотя есть также «хвост» из точек, которые запаздывают. В конце концов, некоторые из точек совершают дополнительные по сравнению с внешней силой обороты, а некоторые пропускают один или несколько оборотов; точки оказываются разбросанными по аттрактору, хотя их распределение и остается неравномерным.

10.2.2 Косвенное описание синхронизации

До сих пор мы характеризовали синхронизацию, непосредственно вычисляя частоту. Это возможно для систем с хорошо определенной фазой, таких как системы Рёсслера (уравнения (10.2)) или Лоренца (уравнения (10.4)), но это может оказаться сложным или неоднозначным для систем с плохо определенной фазой, как в случае системы Рёсслера с аттрактором-воронкой (см. уравнения (10.6) и рис. 10.4). Поэтому было бы полезно иметь возможность выявлять синхронизацию без привязки к конкретному определению фазы. Основная идея состоит в том, что возникновение синхронизации означает появление когерентности между хаотическим процессом и внешней силой. Когерентность может проявиться как в спектре мощности колебаний, так и в коллективной динамике ансамбля идентичных систем, на которые действует общая сила. Это подсказывает два возможных подхода к косвенному описанию захвата хаотического осциллятора внешней силой.

Обычно спектр мощности хаотической системы содержит широкополосную компоненту и пик на средней частоте колебаний;³ этот

³ Строго говоря, спектр зависит от наблюдаемой; мы предполагаем, что для его вычисления используется невырожденная колебательная наблюдаемая (например, $x(t)$ для системы Рёсслера и $z(t)$ для системы Лоренца).

пик очень узок для «хорошей» системы Рёсслера (10.2) и довольно широк для аттрактора Лоренца. Под действием периодической силы в спектре появляется дополнительный δ -пик на частоте ω внешней силы (или ее гармоники $n\omega$). Вне области синхронизации оба пика сосуществуют, и интенсивность δ -пика, грубо говоря, порядка амплитуды силы. Внутри области синхронизации δ -пик поглощает всю интенсивность компоненты колебаний на основной частоте. Таким образом, синхронизация проявляется как сильное увеличение интенсивности S спектральной компоненты на частоте вынуждающей силы. Это происходит за счет появляющейся когерентности хаотических колебаний. Действительно, периодическая сила подавляет диффузию фазы, так что фазы в моменты времени $T, 2T, 3T, \dots$, где $T = 2\pi/\omega$, имеют почти одинаковые значения. Автокорреляционная функция, следовательно, имеет неубывающие максимальные значения при времени задержки $T, 2T, 3T, \dots$, что в частотной области соответствует δ -пику на частоте ω внешней силы.

Другая возможность выявить когерентность состоит в том, чтобы образовать ансамбль копий данной хаотической системы. Без внешней силы такое свойство хаоса как перемешивание приводит к отсутствию когерентности в ансамбле: начав с различных начальных условий, изображающие точки, в конце концов, покрывают весь хаотический аттрактор, в соответствии с естественной инвариантной мерой. То же самое происходит вне области синхронизации, см. рис. 10.7. В синхронном режиме все системы стремятся иметь одну и ту же фазу, как видно из рис. 10.7 и 10.9b. При этом маленькое облако точек вращается как устойчивый объект и не расплывается. Простейший способ охарактеризовать когерентность ансамбля из N идентичных систем – это вычислить среднее поле $X = N^{-1} \sum_1^N x_k$, где x_k – наблюдаемая k -той копии системы.⁴ Если синхронизации нет, то точки в фазовом пространстве расплываются по всему аттрактору и среднее поле очень мало и почти постоянно во времени. В противоположность этому, в случае синхронизации среднее поле осциллирует (с частотой ω) во времени с большой амплитудой.

Подчеркнем опять, что вычисление как среднего поля X , так и интенсивности дискретной спектральной компоненты S , не требует вычисления фазы и, следовательно, независимо от ее определения. Следует отметить, что использование индикаторов X и S не ограничено случаем хаотических систем; они могут быть также использованы

⁴ Как и спектр мощности, среднее поле зависит от наблюдаемой, см. предыдущую сноску.

для характеристики систем с шумом. Мы иллюстрируем использование этих косвенных индикаторов синхронизации на рис. 10.10. Два изложенных косвенных подхода, конечно же, взаимосвязаны. Из-за перемешивания ансамбль идентичных систем может быть сконструирован другим способом, а именно путем наблюдения одной системы в моменты времени $0, nT, 2nT, \dots$ с достаточно большим n . Таким образом, временная когерентность одной системы есть не что иное, как когерентность в ансамбле независимых идентичных систем, на которые действует общая сила. Интенсивность δ -пика в спектре мощности является, таким образом, пропорциональной интенсивности колебаний среднего поля (см. детали в [Pikovsky *et al.* 1997b]).

10.2.3 Синхронизация в терминах неустойчивых периодических орбит

Другой подход к описанию синхронизации хаотических осцилляторов основан на рассмотрении свойств индивидуальных неустойчивых

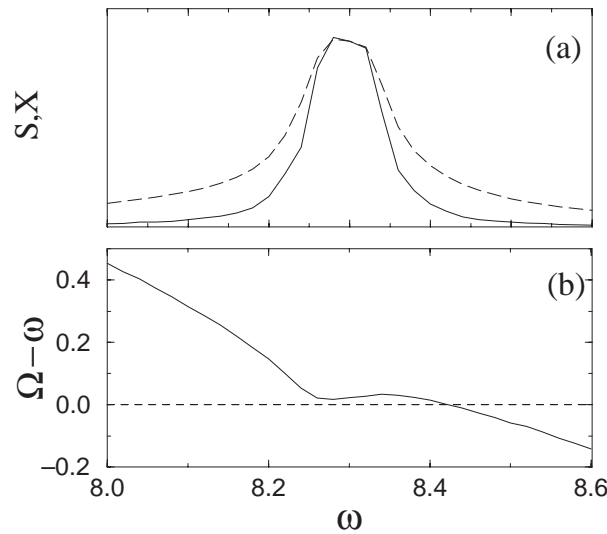


Рис. 10.10. (а) Зависимости интенсивности дискретной спектральной компоненты S (сплошная линия) и дисперсии среднего поля большого ансамбля X (пунктирная линия) от частоты внешней силы для системы Лоренца (10.11). Амплитуда силы $\varepsilon = 5$. Обе зависимости даны в произвольных единицах. Отметим их ярко выраженный резонансный характер. Обе косвенные характеристики, вычисленные по наблюдаемым $z(t)$, имеют максимум в области синхронизации. (б) Для сравнения, нарисована также и наблюдаемая частота.

периодических орбит (НПО), вложенных в хаотический аттрактор. Как известно, эти орбиты создают некий «скелет» хаотического множества (см., например, [Ott 1992; Каток и Хассельблат 1999]). В частности, автономные системы (10.2) и (10.4) имеют бесконечное число неустойчивых периодических решений. Выберем одно из этих решений и рассмотрим влияние на него малой периодической силы. За исключением того, что цикл теперь неустойчив, мы приходим к стандартной проблеме периодически возбуждаемого осциллятора, рассмотренной в разделе 7.3. Следовательно, мы можем использовать излагаемую там теорию и характеризовать синхронизацию конкретной периодической орбиты числом вращения. Иррациональное число вращения означает квазипериодическое движение на инвариантном торе, который возникает из периодической орбиты автономной системы. (Отметим, что этот тор наследует от периодической орбиты свойство неустойчивости.) Рациональное число вращения означает существование на инвариантном торе двух периодических орбит: одной «фазо-устойчивой» и одной «фазо-неустойчивой». Область рациональных чисел вращения – это обычный язык Арнольда (см. рис. 7.15). На границе области захвата две замкнутые орбиты на торе сливаются и исчезают через бифуркацию седло-узел. Вне языка движение, соответствующее данной периодической орбите, не синхронизовано, и траектории на торе плотны.

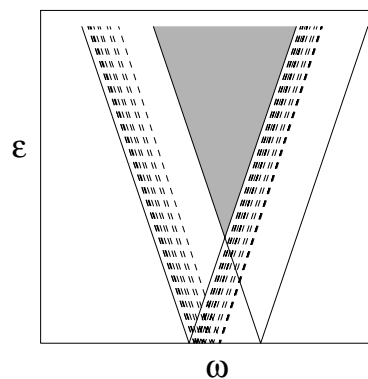


Рис. 10.11. Схематическое изображение языков Арнольда для неустойчивых периодических орбит хаотической системы. В общем случае автономные орбиты имеют различные частоты $\omega_0^{(i)}$, а, следовательно, и языки касаются ω -оси в различных точках. Самый левый и самый правый языки, соответствующие орбитам с минимальной и максимальной $\omega_0^{(i)}$, показаны сплошными линиями. В заштрихованной области все циклы синхронизованы и средняя частота колебаний практически совпадает с частотой внешней силы.

На плоскости параметров ω и ε острие основного языка Арнольда одной из периодических орбит находится в точке $\varepsilon = 0$, $\omega = \omega_0^{(i)}$, где $\omega_0^{(i)}$ – это средняя частота i -той автономной орбиты. Эта частота отличается от формально определенной частоты периодического решения $2\pi/T_i$, где T_i – период орбиты: нам необходимо учесть топологический период \mathcal{N}_i (число оборотов орбиты, см. раздел 10.1) и записать $\omega_0^{(i)} = 2\pi\mathcal{N}_i/T_i$. В общем случае значения $\omega_0^{(i)}$ отличаются для разных периодических орбит: насколько близки частоты $\omega_0^{(i)}$ – зависит от свойств времен возврата. Если частоты $\omega_0^{(i)}$ не очень различаются, то языки Арнольда перекрываются (рис. 10.11), и можно найти область параметров, где движение вдоль всех периодических орбит захвачено внешней силой. Если сила остается не очень большой, то эта область есть пересечение самого левого и самого правого языков Арнольда, которые соответствуют периодическим орбитам автономной системы с наименьшим и наибольшим значением $\omega_0^{(i)}$, соответственно. Внутри этой области хаотические траектории вновь и вновь попадают в окрестности разных торов; двигаясь вдоль поверхности тора, они приближаются к устойчивому по фазе решению и остаются там на некоторое время, пока трансверсальная (амплитудная) неустойчивость не отталкивает их к другому тору. Так как все периодические движения захвачены, фаза остается локализованной в некоторой области: наблюдается синхронизация по фазе. Вне той области, где все языки перекрываются, синхронизация не может быть идеальной: в течение некоторого времени траектория следует вдоль захваченного цикла, а фаза следует за фазой внешней силы, но в другой момент времени траектория подходит близко к незахваченному циклу, и происходит проскок фазы. Последний случай наблюдается в системе Лоренца (рис. 10.9).

10.2.4 Взаимная синхронизация двух связанных осцилляторов

Мы демонстрируем этот эффект на системе двух диффузионно связанных осцилляторов Рёсслера (10.2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(1+\nu)y_1 - z_1 + \varepsilon(x_2 - x_1), & \dot{x}_2 &= -(1-\nu)y_2 - z_2 + \varepsilon(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_1 &= (1+\nu)x_1 + 0.15y_1, & \dot{y}_2 &= (1-\nu)x_2 + 0.15y_2, \\ \dot{z}_1 &= 0.2 + z_1(x_1 - 10), & \dot{z}_2 &= 0.2 + z_2(x_2 - 10). \end{aligned} \quad (10.12)$$

Отметим, что осцилляторы неидентичны; дополнительно введенный параметр ν определяет расстройку собственных средних частот.

Диффузионная связь пропорциональна константе связи ε .

Наблюдаемые частоты обоих осцилляторов могут быть вычислены непосредственно, путем подсчета числа колебаний в единицу времени. Полученная зависимость разности частот (рис. 10.12) дает типичную картину области синхронизации. Фазовая диаграмма различных режимов (как функции связи ε и расстройки ν) демонстрирует три области качественно различного поведения.

- (I) Область синхронизации, где частоты захвачены, $\Omega_1 = \Omega_2$. Важно отметить, что порога синхронизации практически нет; это особенность фазо-когерентного аттрактора Рёсслера.
- (II) Область асинхронных колебаний, где $|\Omega_1 - \Omega_2| = |\Omega_b| > 0$. По аналогии со случаем периодических колебаний, частота Ω_b может рассматриваться как «частота биений».
- (III) В этой области колебания в обеих системах исчезают из-за диффузионной связи. Этот эффект известен для периодических систем как вымирание (гашение) колебаний (см. главу 8).

Весьма полезно описать переход к синхронизации с помощью показателей Ляпунова (см. рис. 10.13). Шестимерная динамическая система (10.12) имеет шесть ляпуновских показателей. При нулевой связи мы имеем вырожденную ситуацию двух независимых систем,

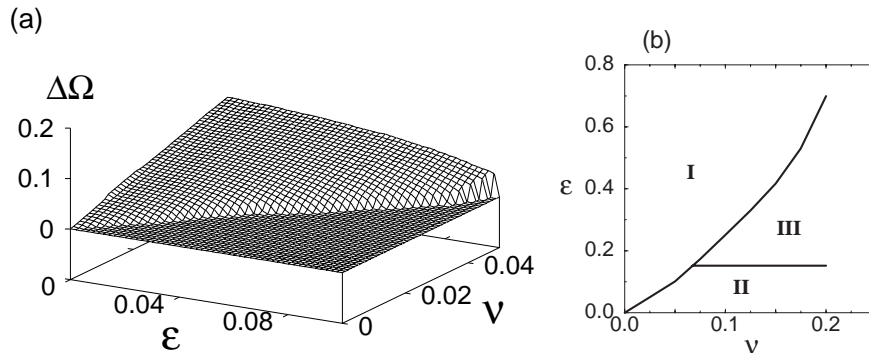


Рис. 10.12. (а) Область синхронизации для двух связанных осцилляторов Рёсслера (10.12): график разности наблюдаемых частот $\Delta\Omega = \langle \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \rangle$ как функции связи ε и расстройки ν демонстрирует область, где $\Delta\Omega$ исчезающе мала. (б) Схематическая диаграмма, показывающая область асинхронных (II) и синхронных (I) движений и область вымирания колебаний (III). Диаграмма приближенная, окна периодичности в I и II не показаны. График (б) воспроизведен из Osipov *et al.*, *Physical Review E*, Vol. 55, 1997, pp. 2353–2361. Copyright 1997 by the American Physical Society.

каждая из которых имеет один положительный, один нулевой и один отрицательный показатель. Два нулевых показателя соответствуют двум независимым фазам. При наличии связи фазы становятся зависимыми и вырождение снимается: только один ляпуновский показатель должен остаться в точности нулем. Тем не менее, мы наблюдаем, что при малой связи второй нулевой ляпуновский показатель остается очень малым (собственно, численно неотличимым от нуля); это соответствует «квазипериодической» динамике фаз, когда каждая из них может быть сдвинута. Только при относительно более сильной связи, когда наступает синхронизация, второй ляпуновский показатель становится отрицательным: теперь фазы захвачены и соотношение между ними устойчиво. Отметим, что два наибольших показателя остаются положительными во всем диапазоне связи, что означает хаотичность и независимость амплитуд: связанная система остается в состоянии гиперхаоса.

10.3 Библиографические заметки

В своем изложении мы следовали работам [Rosenblum *et al.* 1996; Pikovsky *et al.* 1997b], где обсуждались различные определения фазы

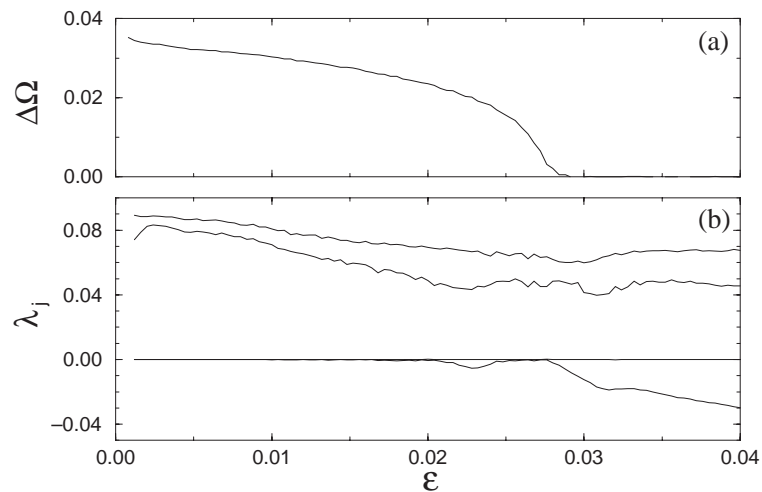


Рис. 10.13. Разность частот (а) и четыре наибольших ляпуновских показателя (б) как функция силы связи ε для взаимодействующих осцилляторов Рёсслера (10.12); $\nu = 0.015$. При слабой связи есть два положительных и два почти нулевых ляпуновских показателя. Переход к захвату фаз происходит примерно при $\varepsilon \approx 0.028$; при этом значении силы связи один из нулевых ляпуновских показателей становится отрицательным.

хаотических систем, а также прямые и косвенные способы описания синхронизации. Захват фазы хаотического осциллятора периодической внешней силой был рассмотрен Пиковским [1984b], который наблюдал увеличение дискретной спектральной компоненты вынуждаемой системы, и Стоун [Stone 1992], которая стробоскопически наблюдала осциллятор Рёсслера, периодически возмущаемый импульсами, а также Вадивасовой и др. [Vadivasova *et al.* 1999]. Сходные эффекты в связанных осцилляторах, в частности перекрытие спектральных пиков как результат взаимодействия, обсуждались в работах [Ланда и Перминов 1985; Анищенко и др. 1991; Ланда и Розенблюм 1992; Anisichenko *et al.* 1992; Landa and Rosenblum 1993].

Захват фазы в терминах периодических орбит был рассмотрен в работах [Pikovsky *et al.* 1997c; Zaks *et al.* 1999; S. H. Park *et al.* 1999a]. Переход к синхронизации и скейлинговые свойства перемежаемости были описаны в [Pikovsky *et al.* 1997a; Rosa Jr. *et al.* 1998; Lee *et al.* 1998]. Эффекты захвата фаз могут также наблюдаться в больших ансамблях, решетках и хаотически осциллирующих средах, см. [Brunnet *et al.* 1994; Goryachev and Kapral 1996; Pikovsky *et al.* 1996; Osipov *et al.* 1997; Brunnet and Chaté 1998; Goryachev *et al.* 1998; Blasius *et al.* 1999] и раздел 12.3. Синхронизация хаотической системы случайной силой была рассмотрена в [Pikovsky *et al.* 1997b].

Захват фазы в хаосе экспериментально наблюдался в электронных генераторах [Пиковский 1984b; Parlitz *et al.* 1996; Rulkov 1996], плазме [Rosa Jr. *et al.* 2000] и в лазерах [Tang *et al.* 1998a,c]. См. также тематический выпуск [Kurths (ed.) 2000].

В связанных неидентичных хаотических осцилляторах захват фаз наблюдается уже при слабой связи. При сильной связи наблюдается тенденция к полной синхронизации (см. детальное обсуждение полной синхронизации в части III). При промежуточной силе связи наблюдается интересный режим: состояния двух взаимодействующих систем почти совпадают с точностью до сдвига по времени, $\mathbf{x}_1(t) \approx \mathbf{x}_2(t - \tau)$. Этот режим, названный *задержанной (lag) синхронизацией*, изучался теоретически в работах [Rosenblum *et al.* 1997b; Sosnovtseva *et al.* 1999] и экспериментально в работе [Taherion and Lai 1999].

Постнов и др. [Postnov *et al.* 1999b] описали мультистабильность состояний с захватом фазы для связанных осцилляторов с многоленточными аттракторами. В завершение мы хотим отметить, что Fujigaki *et al.* [1996] и Fujigaki and Shimada [1997] используют термин *фазовая синхронизация* в другом смысле.

Глава 11

Синхронизация в осциллирующих средах

Осциллирующая среда – это распределенная система, каждый элемент которой совершает автоколебания. Хорошим физическим (на самом деле – химическим) примером служит колебательная реакция (например, реакция Белоусова–Жаботинского) в большом объеме, различные части которого могут колебаться с различными периодами и фазами. Обычно реакция сопровождается изменениями цвета. Поэтому профиль фазы легко виден: различные цвета отвечают различным фазам.

Мы начнем с описания динамики фазы в цепочках и в пространственно-непрерывных системах. Затем мы рассмотрим среду из слабо нелинейных осцилляторов, демонстрирующую богатый набор различных типов поведения; некоторые из них будут описаны в разделе 11.3.

11.1 Цепочки осцилляторов

Цепочка осцилляторов – это естественное обобщение системы двух связанных осцилляторов, описанной в главе 8. Начнем с рассмотрения одномерной цепочки осцилляторов, пронумерованных индексом k и имеющих различные собственные частоты ω_k , в предположении, что взаимодействуют только ближайшие соседи. Если связь слабая, то можно использовать приближение фазовой динамики и записать

уравнения движения как естественное обобщение уравнения (8.5):

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \varepsilon q(\phi_{k-1} - \phi_k) + \varepsilon q(\phi_{k+1} - \phi_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (11.1)$$

Здесь мы для простоты предполагаем, что осцилляторы отличаются только автономными частотами ω_k и что связь одинакова для всех пар. Граничные условия для (11.1) имеют вид $\phi_0 = \phi_1$, $\phi_{N+1} = \phi_N$.

Чтобы получить общее представление о процессах в цепочке, взглянем на предельные случаи. Если связь отсутствует ($\varepsilon = 0$), то фазы всех осцилляторов вращаются с автономными частотами и в цепочке из N осцилляторов наблюдается квазипериодическое движение с N различными частотами. В другом предельном случае, когда связь очень велика, $\varepsilon \gg |\omega_k|$, различие автономных частот можно пренебречь, так что все осцилляторы синхронизируются. Между этими случаями можно ожидать появление частично синхронизованных режимов, с несколькими (меньше, чем N) различными частотами. Поскольку связь стремится синхронизовать ближайших соседей, образуются *кластеры* синхронизованных осцилляторов. Эту качественную картину мы иллюстрируем численным исследованием цепочки из 5 осцилляторов на рис. 11.1.

Переход от независимых колебаний к полностью синхронизованному режиму зависит от распределения частот ω_k . В литературе

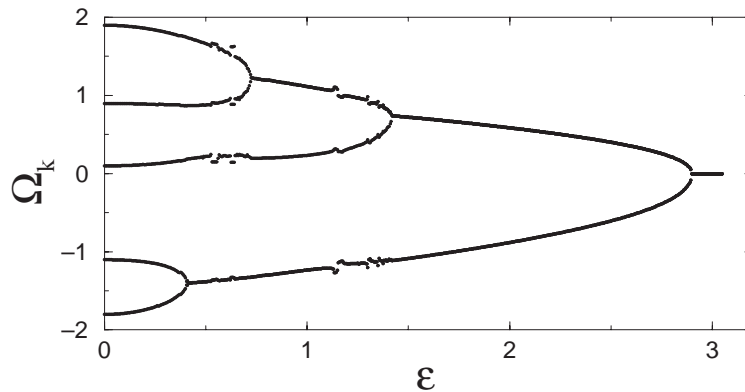


Рис. 11.1. Зависимость наблюдаемых частот $\Omega_k = \langle \dot{\phi}_k \rangle$ от параметра связи ε в цепочке из пяти осцилляторов (11.1). Собственные частоты равны -1.8 , -1.1 , 0.1 , 0.9 , 1.9 , функция связи выбрана в виде $q(x) = \sin x$. С увеличением связи сначала осцилляторы 1 и 2 образуют кластер при $\varepsilon \approx 0.4$. Затем при $\varepsilon \approx 0.6$ появляется кластер из осцилляторов 4 и 5. При $\varepsilon \approx 1.4$ к нему присоединяется осциллятор 3. Наконец, при $\varepsilon \approx 3$ все осцилляторы синхронизируются.

рассматривались две модели: случайное распределение собственных частот и регулярное линейное распределение. В то время как состояния с многими кластерами с трудом поддаются аналитическому описанию, переход от полной синхронизации к режиму с двумя кластерами можно рассмотреть аналитически. В качестве первого шага введем разность фаз между ближайшими соседями $\psi_k = \phi_{k+1} - \phi_k$, и получим из (11.1) систему $N - 1$ уравнений

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \Delta_k + \varepsilon[q(\psi_{k-1}) + q(\psi_{k+1}) - 2q(\psi_k)], \quad k = 1, \dots, N - 1. \quad (11.2)$$

Здесь через $\Delta_k = \omega_{k+1} - \omega_k$ обозначены разности частот. Для стационарного состояния $\dot{\psi}_k = 0$ получается линейная трехдиагональная система алгебраических уравнений для неизвестных $u_k = q(\psi_k)$; она имеет единственное решение. Следующая задача состоит в обращении этого соотношения и нахождении $\psi_k = q^{-1}(u_k)$. Поскольку функция связи $q(\psi)$ периодическая, имеется множество решений, если только все компоненты решения u_k лежат в интервале (q_{\min}, q_{\max}) . Как было доказано Ermentrout and Kopell [1984], если функция связи

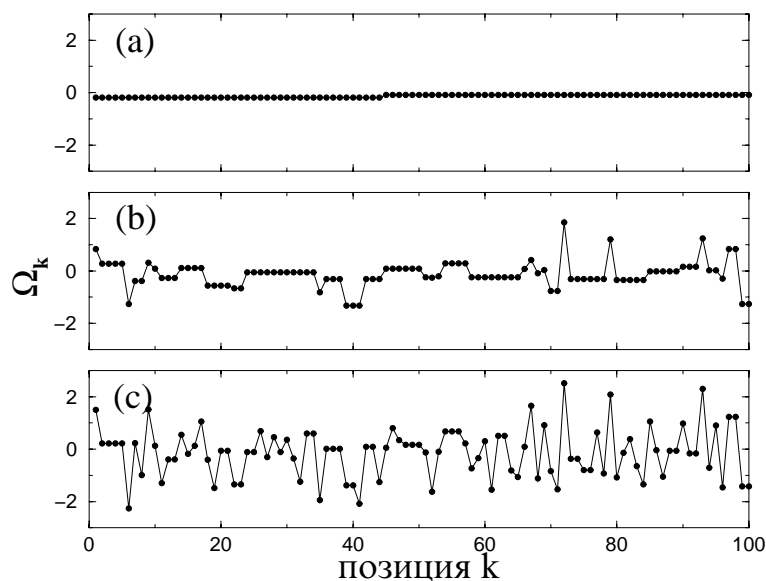


Рис. 11.2. Кластеры в цепочке (11.1) из 100 фазовых осцилляторов со случайным распределением собственных частот (гауссовское распределение с единичной дисперсией) и с функцией связи $q(x) = \sin x$. (a) Двухкластерное состояние при $\varepsilon = 4$. (b) Множество относительно больших кластеров при $\varepsilon = 1$. (c) Несколько небольших кластеров и много несинхронизованных осцилляторов при $\varepsilon = 0.2$.

имеет один минимум и один максимум, то из всех возможных 2^{N-1} решений устойчиво только одно, остальные состояния равновесия являются седлами и неустойчивыми узлами. При критическом значении параметра связи, для которого при некотором l , $u_l = q_{\min}$ или $u_l = q_{\max}$, устойчивое состояние равновесия исчезает через бифуркацию седло–узел и возникает периодическая траектория. Фазовое пространство системы (11.2) представляет собой $(N-1)$ -мерный тор, и появляющаяся периодическая траектория вращается в направлении переменной ψ_l . В результате $\langle \dot{\psi}_k \rangle = 0$ для всех k кроме $k = l$, для которого $\langle \dot{\psi}_l \rangle \neq 0$. В терминах фаз ϕ_k это означает, что все осцилляторы $1, \dots, l$ имеют одну и ту же наблюдаемую частоту Ω_1 , а значение частоты Ω_2 осцилляторов $l+1, \dots, N$ отличается от нее. Таким образом, появляются два кластера синхронизованных осцилляторов. Отметим, что разности фаз ψ_k не постоянны, а колеблются, поскольку в общем случае все ψ_k являются периодическими функциями времени. Дальнейшее уменьшение связи приводит к бифуркации расщепления образовавшихся кластеров и т.д. Для больших цепочек со случайным распределением собственных частот типичная картина выглядит как на рис. 11.2.

11.2 Непрерывное по пространству распределение фазы

Во многих случаях осцилляторы не могут рассматриваться как дискретные объекты, а образуют непрерывную среду. Типичным примером служит периодическая химическая реакция в сосуде, где в каждой точке наблюдаются колебания и связь осуществляется путем диффузии. Здесь фаза является функцией пространственных координат и времени, и нашей ближайшей задачей будет вывод уравнения в частных производных, описывающего ее динамику.

Один возможный подход к этой задаче, основанный на фазовом приближении к однородному колебательному решению исходных уравнений в частных производных, будет описан в разделе 11.3. Здесь же мы будем исходить из уравнений цепочки (11.1) и рассмотрим их непрерывный предел. В этом пределе расстояние между ближайшими соседями стремится к нулю, а постоянная связи стремится к бесконечности. Если положить $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}(\Delta x)^{-2}$ и разложить q в ряд Тейлора, то получим

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \tilde{\varepsilon}q'(0) \frac{\phi_{k-1} - 2\phi_k + \phi_{k+1}}{(\Delta x)^2} \\ + \tilde{\varepsilon}q''(0) \frac{(\phi_{k+1} - \phi_k)^2 + (\phi_k - \phi_{k-1})^2}{2(\Delta x)^2} + \dots \end{aligned} \quad (11.3)$$

В непрерывном пределе нужно положить $\phi_{k+1} - \phi_k = O(\Delta x)$, тогда второй и третий член в правой части при $\Delta x \rightarrow 0$ сходятся к второй производной и квадрату первой производной от фазы. Легко проверить, что остальные члены в этом пределе стремятся к нулю. В результате получаем

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \omega(x) + \alpha \nabla^2 \phi(x, t) + \beta (\nabla \phi(x, t))^2. \quad (11.4)$$

Это уравнение справедливо при $\alpha > 0$; в противном случае в цепочке устанавливаются противофазные устойчивые колебания, описание которых в непрерывном пределе требует специального рассмотрения.

Уравнение (11.4) справедливо в общем случае при плавных пространственных изменениях фазы; более точно, если характерный пространственный масштаб стремится к бесконечности. Действительно, уравнение в частных производных для фазы может содержать только ее производные, а не саму фазу (поскольку динамика инвариантна по отношению к сдвигам фазы). Далее, из симметрии $x \rightarrow -x$ следует, что общая степень производной должна быть четной. Это означает, что любые дополнительные члены в правой части (11.4) либо содержат высшие производные, либо высшие нелинейности (например, $\nabla^4 \phi$, $(\nabla \phi)^2 \nabla^2 \phi$). Полагая $\nabla \phi \sim L^{-1}$, можно оценить эти дополнительные члены, они имеют порядок L^{-4}, L^{-6}, \dots , т.е. много меньше членов порядка L^{-2} , учтенных в (11.4). В разделе 11.3 будет, однако, показано, что, если характерный пространственный масштаб изменений фазы конечен, то следует включать в (11.4) члены более высокого порядка.

11.2.1 Плоские волны и мишени

Рассмотрим сначала среду из идентичных осцилляторов, т.е. среду, в которой $\omega(x) = \text{constant}$. В этом случае уравнение (11.4) имеет решения в виде плоских волн

$$\phi(x, t) = \mathcal{K}x + (\omega + \beta \mathcal{K}^2)t + \phi_0. \quad (11.5)$$

Колебания в среде синхронны, но частота в общем случае отличается от собственной, и сдвиг фазы между различными точками не равен

нулю. Знак коэффициента β определяет дисперсию волн, т.е. растёт или убывает их частота с волновым числом (последний случай более типичен). Какое из решений семейства (11.5) реализуется, зависит, в основном, от граничных условий. При условии равенства нулю градиента на границе $\nabla\phi|_B = 0$ единственным возможным является решение с нулевым волновым числом \mathcal{K} . Таким образом устанавливается пространственно однородный профиль фазы, и все точки среды идеально синхронизованы (т.е. все фазы равны). Поздняя стадия этого процесса описывается линеаризованным уравнением (11.4), т.е. диффузионным уравнением, так что характерное время установления синхронизации есть L^{-2} , где L – длина системы.

В безграничной одномерной среде возможны более сложные структуры, вследствие нелинейности уравнения (11.4). В частности, две плоские волны могут образовывать стационарный переход [Kuramoto 1984]:

$$\phi(x, t) = \omega t + \beta(a^2 + b^2)t + ax + \frac{\alpha}{\beta} \ln \cosh \frac{b\beta}{\alpha}(x + 2a\beta t). \quad (11.6)$$

Это решение зависит от двух параметров a и b , определяющих асимптотику плоских волн при $x \rightarrow \pm\infty$. Предполагая для определенности $\beta b > 0$, получим при больших $|x|$

$$\phi \sim \mathcal{K}_{\pm} x + (\omega + \beta\mathcal{K}_{\pm}^2)t, \quad \mathcal{K}_{\pm} = a \pm b. \quad (11.7)$$

Сам переход смещается со скоростью $-2a\beta$. Иногда его называют доменной стенкой, он может быть источником или стоком волн. Из анализа соотношения (11.7) следует, что при $\beta > 0$ побеждает волновая структура с большей частотой: переход движется в сторону волны с меньшей частотой.

При периодических граничных условиях возможны плоские волны (11.5) со всеми \mathcal{K} , удовлетворяющими соотношению $\mathcal{K}L = m2\pi$. Можно ввести «топологический заряд» (или «пространственное число вращения») профиля фазы согласно

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \nabla\phi d\phi.$$

Эта величина может принимать только целые значения, она характеризует фазовый сдвиг вдоль среды. Ясно, что топологический заряд сохраняется в процессе эволюции, поэтому любой начальный профиль фазы с зарядом Q в конце концов приходит к плоской волне (11.5) с волновым числом $\mathcal{K} = Q2\pi/L$.

Если профиль собственных частот $\omega(x)$ нетривиален, то удобно с помощью преобразования Хопфа–Коула

$$\phi = \frac{\alpha}{\beta} \ln u \quad (11.8)$$

привести нелинейное уравнение (11.4) к линейному

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\beta}{\alpha} \omega(x)u + \alpha \nabla^2 u. \quad (11.9)$$

Его можно рассматривать как уравнение Шрёдингера с мнимым временем и с потенциалом $-(\beta/\alpha)\omega(x)$. Асимптотическое ($t \rightarrow \infty$) поведение определяется первой модой с наиболее медленным затуханием. Наибольшее собственное значение уравнения

$$\lambda u = \frac{\beta}{\alpha} \omega(x)u + \alpha \nabla^2 u \quad (11.10)$$

дает, таким образом, частоту стационарных колебаний. При определении этой частоты следует аккуратно учитывать граничные условия; из-за нелинейности преобразования (11.8) они зависят от пространственного числа вращения Q .

Предположим, что профиль частот асимптотически однороден: $\omega \rightarrow \omega_0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, но имеет локальный максимум (мы предполагаем, что $Q = 0$, так что $u \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$). Это соответствует уравнению Шрёдингера с локальным минимумом (максимумом) потенциала, в зависимости от знака β . Из элементарной квантовой механики известно, что в одномерном случае потенциал вида ямы всегда имеет хотя бы одно дискретное собственное значение λ_1 в диапазоне $\omega_{\max} > \lambda > \omega_0$. Поэтому ведущая собственная функция имеет вид колебаний с частотой λ_1 : малая область с повышенной (при положительных β) частотой определяет частоту всей среды. Если локальная неоднородность соответствует холму потенциала, то у задачи на собственные значения (11.10) нет дискретных решений и наблюдаемая частота соответствует однородной области. Подобная ситуация наблюдается и в дву- и трехмерной версии этой задачи: локальная неоднородность с большей или меньшей частотой излучает концентрические волны и приводит к структуре типа «мишень», в зависимости от знака β .

11.2.2 Влияние шума: шероховатость против синхронизации

Уже небольшой шум может испортить синхронизацию в большой системе. Используем для моделирования однородной ($\omega = \text{constant}$)

колебательной среды с шумом ланжевеновский подход, т.е. добавим в правую часть (11.4) флуктуирующую силу:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \omega + \alpha \nabla^2 \phi(x, t) + \beta (\nabla \phi(x, t))^2 + \xi(x, t). \quad (11.11)$$

Это уравнение хорошо известно в теории шероховатых (rough) поверхностей как уравнение Кардара–Паризи–Жанга (см., например, [Barabási and Stanley 1995; Halpin-Healy and Zhang 1995]). В контексте нашей задачи поверхность есть профиль фазы $\phi(x, t)$, а шероховатость означает, что из начального однородного профиля развивается шероховатая функция x (с большими отклонениями от среднего значения).

Чтобы продемонстрировать шероховатость, рассмотрим линеаризованную версию уравнения (11.11), в которой пренебрежем членом $\sim (\nabla \phi)^2$:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \omega + \alpha \nabla^2 \phi(x, t) + \xi(x, t). \quad (11.12)$$

В теории шероховатых поверхностей (11.12) называют уравнением Эдвардса–Уилкинсона. Совершив преобразование Фурье по пространству, мы можем переписать (11.12) в виде системы независимых линейных уравнений для мод Фурье

$$\frac{d\phi_{\mathcal{K}}}{dt} = \omega \delta_{\mathcal{K},0} - \alpha \mathcal{K}^2 \phi_{\mathcal{K}} + \xi_{\mathcal{K}}(t).$$

Если предполагать шум гауссовским и δ -коррелированным в пространстве и времени, то все Фурье-компоненты $\xi_{\mathcal{K}}$ будут независимыми δ -коррелированными во времени случайными процессами с одной и той же интенсивностью $\langle \xi_{\mathcal{K}}(t) \xi_{\mathcal{K}'}(t') \rangle = 2\sigma^2 \delta_{\mathcal{K}\mathcal{K}'} \delta(t - t')$. Таким образом, спектральные компоненты $\phi_{\mathcal{K}}(t)$ также есть независимые процессы. Записывая для каждой величины $\phi_{\mathcal{K}}$ уравнение Фоккера–Планка, получим гауссовское стационарное распределение с дисперсией $Var(\phi_{\mathcal{K}}) = \sigma^2 \alpha^{-1} \mathcal{K}^{-2}$. Таким образом, пространственный спектр профиля фазы $\phi(x, t)$ пропорционален \mathcal{K}^{-2} ; можно показать (см., например, [Halpin-Healy and Zhang 1995]), что это верно и для нелинейного уравнения Кардара–Паризи–Жанга (11.11).

Дисперсию мгновенного профиля фазы $Var(\phi) = \langle (\phi - \langle \phi \rangle)^2 \rangle$ можно вычислить через интеграл по пространственному спектру. Поскольку интеграл расходится при $\mathcal{K} \rightarrow 0$, следует учесть ограничение при наименьшем волновом числе \mathcal{K}_0 , соответствующем размеру системы L : $\mathcal{K}_0 \sim L^{-1}$ (другое ограничение на малых масштабах

необходимо, чтобы избавиться от ультрафиолетовой расходимости). Начиная с этого места, результат зависит от размерности задачи d :

$$\text{Var}(\phi) \sim \int_{L^{-1}}^C \mathcal{K}^{d-1} \mathcal{K}^{-2} d\mathcal{K} \sim \begin{cases} L & d = 1 \\ \ln L & d = 2 \\ \text{constant} & d \geq 3. \end{cases} \quad (11.13)$$

Шероховатость – это свойство неограниченного роста ширины «поверхности» с увеличением размера системы. Как следует из (11.13), шероховатость существенно зависит от размерности задачи, т.е. от того, является колебательная среда одно-, дву- или трехмерной. Интегрирование пространственного спектра не приводит к расходимости при размерности большей, чем три, так что в этом случае шероховатости нет: дисперсия поверхности конечна даже в очень больших системах. В отличие от этого, профиль фазы шероховат при размерностях $d = 1, 2$.

С точки зрения динамики фазы переход к шероховатости может быть интерпретирован как потеря когерентности (см. [Gallas *et al.* 1992; Grinstein *et al.* 1993]). Начнем с шероховатости в одномерном случае. Отметим сначала, что из-за статистической пространственной однородности наблюдаемые частоты в (11.11) одинаковы во всех точках (что и не удивительно, поскольку автономные частоты тоже одинаковы). Таким образом, с точки зрения совпадения наблюдаемых частот, колебания в среде синхронизованы. Однако они не когерентны. В каждый момент времени профиль фазы есть кривая типа случайных блужданий (это видно из формы спектра $\sim \mathcal{K}^{-2}$), поэтому на малых расстояниях фазы отличаются не очень сильно и колебания могут рассматриваться как синхронные. Однако на больших пространственных масштабах характерная разность фаз превышает 2π и фазы, взятые по модулю 2π , не коррелированы. Если взять какую-нибудь зависящую от фазы наблюдаемую, например $\sin \phi$, то среднее от нее по всей среде постоянно, как в случае полностью независимых колебаний. В этом смысле шероховатость означает отсутствие когерентности в большой системе. И наоборот, если шероховатость профиля фазы отсутствует, т.е. вариации фазы по всей системе меньше 2π , то не только частоты всех осцилляторов совпадают, но и фазы коррелированы, и среднее от зависящей от фазы наблюдаемой по всей среде будет осциллировать с общей частотой. В работе [Chaté and Manneville 1992] приведены различные примеры такого поведения.

11.3 Слабо нелинейная колебательная среда

В разделе 11.2 колебательная среда описывалась с помощью одной фазовой переменной. Это возможно, если отклонение всех остальных переменных от предельного цикла, описывающего однородные периодические колебания, мало. Если это условие не выполняется, то необходимо рассматривать полные уравнения в частных производных. Ситуация упрощается в случае слабо нелинейных автоколебаний. В этом случае можно ввести комплексную амплитуду A , зависящую от пространства и времени, и представить переменные задачи $u(x, t)$ в виде $u = \text{Re}(A(x, t)e^{i\omega t})$. Здесь ω обозначает частоту автоколебаний. Уравнения для A можно вывести для каждой конкретной задачи с помощью метода усреднения или одного из его вариантов (см., например, [Kuramoto 1984; Naken 1993; Bohr *et al.* 1998]). Здесь мы воспользуемся тем же приемом, что и в разделе 11.2: возьмем цепочку слабо нелинейных автоколебательных систем и рассмотрим ее в непрерывном пределе.

11.3.1 Комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау

Одномерную цепочку слабо нелинейных осцилляторов можно описать обобщением уравнения (8.12):

$$\frac{dA_k}{dt} = \mu A_k - (\gamma + i\alpha)|A_k|^2 A_k + (\beta + i\delta)(A_{k+1} + A_{k-1} - 2A_k). \quad (11.14)$$

Здесь мы предполагаем, что параметры всех осцилляторов одинаковы. Переход к непрерывной среде означает, что разность $A_{k+1} - A_k$ порядка Δx ; соответственно постоянные взаимодействия β и δ должны быть велики. Полагая $\beta = \tilde{\beta}(\Delta x)^{-2}$ и $\delta = \tilde{\delta}(\Delta x)^{-2}$, получим

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \mu A - (\gamma + i\alpha)|A|^2 A + (\tilde{\beta} + i\tilde{\delta})\nabla^2 A.$$

Удобно использовать то же изменение масштабов, что и в разделе 8.2, т.е. ввести безразмерное время, используя μ , и безразмерную амплитуду, используя $\sqrt{\gamma/\mu}$; тогда получается знаменитое комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау (КУГЛ):

$$\frac{\partial a(x, t)}{\partial t} = a - (1 + ic_3)|a|^2 a + (1 + ic_1)\nabla^2 a, \quad (11.15)$$

описывающее слабо нелинейные автоколебания в сплошной среде. Различные члены имеют следующее физическое значение: первый

член в правой части описывает линейный рост колебаний; второй член описывает нелинейное насыщение (действительная часть коэффициента) и нелинейный сдвиг частоты (мнимая часть); последний член описывает пространственное взаимодействие – диффузию – диссипативного (действительная часть) или консервативного (мнимая часть) типа. Чисто консервативная версия КУГЛ (т.е. с чисто мнимыми коэффициентами в правой части, формально это соответствует пределу $c_{1,3} \rightarrow \infty$) есть нелинейное уравнение Шрёдингера – полностью интегрируемая гамильтоновская система. В контексте описания автоколебаний диссипативные члены существенны; более того, в некоторых ситуациях (изохронные автоколебания и чисто диссипативное взаимодействие) коэффициенты c_1 и c_3 обнуляются. Не претендуя на полное описание свойств КУГЛ (см., например, [Shraiman *et al.* 1992; Cross and Hohenberg 1993; Chaté and Manneville 1996; Bohr *et al.* 1998]), мы отметим здесь только свойства, важные с точки зрения синхронизации.

КУГЛ имеет решения в виде плоских волн (ср. с (11.5))

$$a(x, t) = (1 - \mathcal{K}^2) \exp[i\mathcal{K}x - i(c_3 + (c_1 - c_3)\mathcal{K}^2)t],$$

которые можно интерпретировать как синхронный режим в среде. Не все эти волны устойчивы, но по крайней мере некоторые длинноволновые решения устойчивы, если

$$1 + c_1 c_3 > 0. \quad (11.16)$$

Чтобы увидеть, как возникает критерий (11.16), запишем фазовое приближение для КУГЛ. Это приближение справедливо для плавно меняющихся в пространстве полей, где диффузионный член (пропорциональный квадрату характерного волнового числа) может рассматриваться как малое возмущение. В этом случае можно применить общую формулу (7.14) для возмущений вблизи однородного предельного цикла и получить уравнение для фазы. В эту формулу мы подставим фазовую зависимость в виде (ср. (7.10) и (7.16))

$$\phi(X, Y) = \tan^{-1} \frac{Y}{X} - \frac{c_3}{2} \ln(X^2 + Y^2),$$

а возмущение – в виде

$$p_X = \nabla^2 X(\phi) - c_1 \nabla^2 Y(\phi), \quad p_Y = \nabla^2 Y(\phi) + c_1 \nabla^2 X(\phi)$$

с $a = X + iY = \cos \phi + i \sin \phi$ и получим

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c_3 + (1 + c_3 c_1) \nabla^2 \phi + (c_3 - c_1) (\nabla \phi)^2. \quad (11.17)$$

Это уравнение, разумеется, совпадает с (11.4). Основная особенность, делающая динамику КУГЛ нетривиальной, это возможность неустойчивости фазы: коэффициент диффузии фазы в уравнении (11.17) есть $1 + c_3 c_1$, и, если он отрицателен, то пространственно однородное решение неустойчиво. Критерий (11.16) был выведен Ньюэлом [Newell 1974], но неустойчивость часто называют неустойчивостью Бенжамина–Фэйра, по имени авторов, исследовавших аналогичную неустойчивость нелинейных волн на воде [Benjamin and Feir 1967].

Физический механизм неустойчивости станет понятен, если сравнить критерий Ньюэла (11.16) с уравнением (8.17), описывающим взаимодействие двух осцилляторов. Как обсуждалось в разделе 8.2, комбинация неизохронности и реактивной связи приводит к отталкиванию фаз связанных осцилляторов; точно такая же комбинация приводит к неустойчивости в непрерывной среде.

Численные эксперименты показывают, что вблизи порога фазовой неустойчивости (11.16) амплитуда $|a|$ остается близкой к стационарному значению 1, а фаза меняется в пространстве и во времени нерегулярно. Этот режим называют фазовой турбулентностью. Его можно описать, используя обобщение уравнения (11.17)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c_3 + (1 + c_3 c_1) \nabla^2 \phi + (c_3 - c_1) (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} c_1^2 (1 + c_3^2) \nabla^4 \phi, \quad (11.18)$$

где учтен стабилизирующий член, пропорциональный четвертой производной по пространству. Это уравнение Курамото–Сивашинского [Непомнящий 1974; Kuramoto and Tsuzuki 1976; Sivashinsky 1978], описывающее нелинейную стадию фазовой неустойчивости. В достаточно большой пространственной области оно имеет турбулентные решения. Интересно отметить, что из-за фазовой турбулентности крупномасштабные свойства профиля фазы в уравнении Курамото–Сивашинского (11.18) такие же, как в уравнении Кардара–Паризи–Жанга (11.11) [Yakhot 1981; Bohr *et al.* 1998]: турбулентность играет роль эффективного шума для крупномасштабных изменений фазы. В частности, в большой системе профиль фазы становится шероховатым, что означает потерю когерентности. Вдали от границы неустойчивости наблюдается режим амплитудной турбулентности. Он характеризуется появлением дефектов – точек на пространственно–временной диаграмме, где амплитуда обращается в ноль. В дефекте разность фаз между соседними точками меняется на $\pm 2\pi$, при этом пропадают как синхронизация, так и когерентность. Основные режимы в КУГЛ показаны на

рис. 11.3.

В дву- и трехмерной колебательной среде появляются новые устойчивые объекты – спирали. Спираль вращается вокруг топологического дефекта и устойчива в широком диапазоне параметров. Колебания в спирали синхронизованы. Другие объекты, часто наблюдаемые в двумерных колебательных средах, это мишени: концентрические волны распространяющиеся из осциллирующего центра. В неоднородной среде, где возможны мишени с разными периодами, обычно соревнование выигрывает волна с наименьшим периодом. Более подробно свойства спиралей и мишеней, в том числе в среде из релаксационных осцилляторов, описаны в работах [Cross and Hohenberg 1993; Bohr *et al.* 1998; Mikhailov 1994; Walgraef 1997] и в приведенных там ссылках.

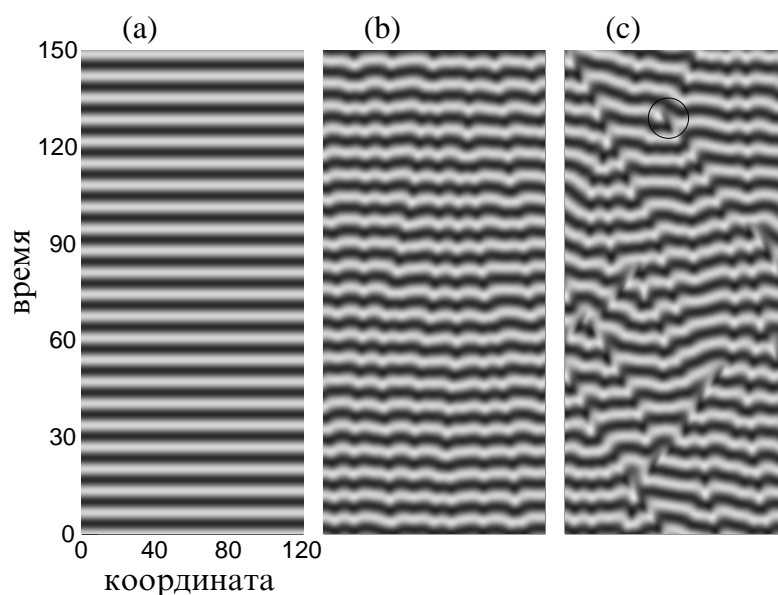


Рис. 11.3. Режимы в комплексном уравнении Гинзбурга–Ландау. Действительная часть $\text{Re}(a)$ показана градациями серого цвета, так что линии постоянного цвета соответствуют линиям постоянной фазы. (a) Устойчивые пространственно однородные периодические по времени колебания при $c_3 = 1$, $c_1 = 0$. (b) Режим фазовой турбулентности при $c_3 = 1$, $c_1 = -1.7$; линии постоянной фазы флуктуируют, но не разрываются. (c) Амплитудная турбулентность при $c_3 = 1$, $c_1 = -2$; один дефект, в котором амплитуда обнуляется и линия постоянной фазы разрывается, обведен кружком.

11.3.2 Внешнее воздействие на колебательную среду

Интересная, но еще не полностью решенная, задача состоит в синхронизации колебательной среды внешней периодической силой. В частности, [Petrov *et al.* 1997] провели недавно эксперименты с двумерной колебательной химической реакцией (реакцией Белоусова—Жаботинского). С помощью переменного освещения осуществлялось периодическое воздействие, что приводило к различным захваченным и асинхронным режимам (см. также раздел 4.2.4). Мы кратко изложим здесь численные результаты по исследованию слабо нелинейной одномерной среды. Колебательная среда описывается КУГЛ (11.15); учет дополнительной периодической синусоидальной силы с частотой, близкой к собственной частоте среды, приводит к уравнению

$$\frac{\partial a(x, t)}{\partial t} = (1 - i\nu)a - (1 + ic_3)|a|^2 a + (1 + ic_1)\nabla^2 a - ie \quad (11.19)$$

(ср. с соответствующим уравнением для одного осциллятора с силой (7.43)). Здесь e — это амплитуда силы, а ν — расстройка частот. В пространственно однородном случае вопрос существования синхронного решения $a = \text{constant}$ сводится к анализу уравнения (7.43). Отличие состоит в свойствах устойчивости решений: в среде пространственно неоднородные возмущения могут нарастать, даже если мы находимся в области устойчивой синхронизации одного осциллятора (уравнение (7.43)). Таким образом, синхронизация может быть нарушена из-за пространственной неоднородности. Другой интересный момент заключается в том, что, даже если однородное синхронизованное состояние устойчиво, то оно не обязательно является глобальным аттрактором. Действительно, предположим, что мы прикладываем внешнюю силу к состоянию с большими отклонениями фазы или к плоской волне с ненулевым волновым числом. Сила стремится привести фазу к устойчивому значению ϕ_0 , но все фазы $\phi_0 + 2\pi m$ также устойчивы. Поэтому фазовый профиль будет иметь вид последовательности областей постоянной фазы, разделенных $\pm 2\pi$ -перепадами, см. рис. 11.4.

При некоторых параметрах системы эти перепады могут быть устойчивы (обычно они движутся с постоянной скоростью), и колебательная среда никогда полностью не синхронизируется. При других параметрах перепад исчезает с образованием дефекта, как при амплитудной турбулентности. В последнем случае есть две возможности. Перепад может полностью исчезнуть, так что в конце концов установится полная синхронизация: фазы всех точек одинаковы и

захвачены внешней силой. Однако при определенных параметрах возмущения, появляющиеся при исчезновении перепада, приводят

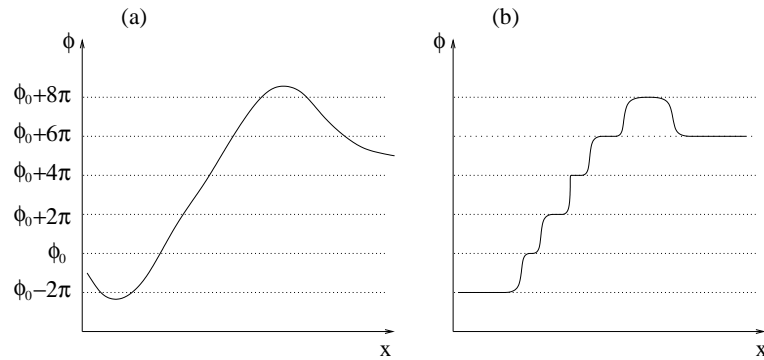


Рис. 11.4. Образование перепадов из начального профиля фазы. Устойчивые значения фазы показаны пунктиром. (a) Начальный профиль. (b) Перепады формируются под действием внешней силы.

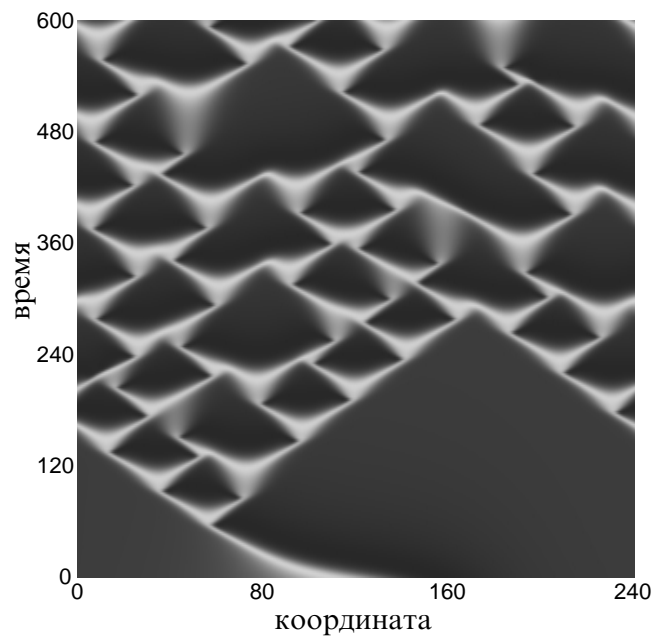


Рис. 11.5. Размножение перепадов в КУГЛ с внешней силой (11.19) при $c_3 = 1$, $c_1 = 0$, $\nu = 1.1$, $e = 0.073$. Поле $\text{Re}(a)$ показано градациями серого цвета. Режим идеальной синхронизации (т.е. $\text{Re}(a) = \text{constant}$) устойчив по отношению к малым возмущениям, но один начальный перепад разрушает этот режим, приводя к перемежающемуся состоянию появляющихся и исчезающих перепадов.

к двум новым перепадам (см. детали в [Chaté *et al.* 1999]). Таким образом перепады начинают размножаться, обычно (в больших системах) приводя к турбулентности. Этот режим перемежающийся: в одном месте наблюдается синхронизация в течение долгого интервала времени, но иногда перепад создает 2π -проскок фазы. Пространственно–временная динамика показана на рис. 11.5.

11.4 Библиографические заметки

Одномерные цепочки различных осцилляторов подробно исследовались численно: фазовые осцилляторы [Ermentrout and Kopell 1984; Kopell and Ermentrout 1986; Sakaguchi *et al.* 1988a; Rogers and Wille 1996; Zheng *et al.* 1998; Ren and Ermentrout 2000], слабо нелинейные осцилляторы [Ermentrout 1985], системы фазовой автоподстройки [Afraimovich *et al.* 1994; de Sousa Vieira *et al.* 1994], джозефсоновские контакты [Braiman *et al.* 1995], релаксационные осцилляторы [Corral *et al.* 1995b,a; Herz and Hopfield 1995; Hopfield and Herz 1995; Drossel 1996; Mousseau 1996; Díaz-Guilera *et al.* 1998], хаотические [Osipov *et al.* 1997] и возбуждаемые шумом [Neiman *et al.* 1999b] осцилляторы. Результаты для двумерных цепочек можно найти в [Sakaguchi *et al.* 1988a; Aoyagi and Kuramoto 1991; Blasius *et al.* 1999].

Колебательные среды исследовались подробно, но только в некоторых работах упор делался на свойства синхронизации. Синхронизация внешней силой исследовалась экспериментально в [Petrov *et al.* 1997], соответствующее комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау рассматривалось в [Couillet and Emilsson 1992b,a; Schrader *et al.* 1995; Chaté *et al.* 1999; Elphick *et al.* 1999]. Junge and Parlitz [2000] исследовали фазовую синхронизацию двух связанных уравнений Гинзбурга–Ландау.

Глава 12

Ансамбли глобально связанных осцилляторов

Эффект взаимной синхронизации двух связанных осцилляторов, описанный в главе 8, может быть обобщен на более сложные случаи. Одна ситуация была описана в главе 11, где мы рассматривали решетки осцилляторов, связанных с ближайшими соседями. Часто осцилляторы не образуют регулярной решетки; более того, они могут взаимодействовать не только с соседями, но и со многими другими осцилляторами. Исследования трех и четырех осцилляторов, связанных каждый с каждым, дают достаточно сложную, практически неисчерпаемую картину (см., к примеру, [Tass and Naken 1996; Tass 1997]). Ситуация упрощается, если взаимодействие однородно, т.е. все пары осцилляторов связаны одинаково. Более того, если число осцилляторов велико, то можно рассмотреть термодинамический предел, где число элементов ансамбля стремится к бесконечности. В этом случае, когда осцилляторы не упорядочены в пространстве, обычно говорят об ансамбле (популяции) связанных осцилляторов. При этом широко используется аналогия со статистической механикой, поэтому неудивительно, что переход к синхронизации выглядит как неравновесный фазовый переход в ансамбле.

Мы начнем с описания перехода Курамото в ансамбле фазовых осцилляторов. Далее, мы рассмотрим ансамбль зашумленных систем. Различные обобщения основной модели (в частности, ансамбли хаотических осцилляторов) рассмотрены в разделе 12.3.

12.1 Переход Курамото

В данном разделе мы рассматриваем, следуя Курамото [Kuramoto 1984], простую модель N взаимно связанных осцилляторов, имеющих различные собственные частоты ω_k . Динамика системы описывается уравнениями, сходными с (8.5):

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_k). \quad (12.1)$$

Параметр ε здесь определяет силу связи. Сила связи между каждой парой выбрана пропорциональной N^{-1} : только в этом случае мы получаем независимые от N результаты в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$. Действительно, если связь между двумя осцилляторами не зависит от N , то сила, действующая на каждый осциллятор, растет с размером ансамбля и в термодинамическом пределе стремится к бесконечности, что, очевидно, приводит к синхронизации всех элементов ансамбля. Собственные частоты осцилляторов ω_k предполагаются распределенными в некотором диапазоне, и при $N \rightarrow \infty$ мы можем описать распределение с помощью плотности $g(\omega)$.¹ Мы будем предполагать, что распределение симметрично по отношению к единственному максимуму на частоте $\bar{\omega}$. В уравнениях (12.1) предполагается, что связь имеет простейший синусоидальный вид; некоторые обобщения будут рассмотрены в разделе 12.3.

Прежде чем обсуждать возможное возникновение взаимной синхронизации, перепишем систему (12.1) в более удобном для анализа виде. Введем комплексное *среднее поле* ансамбля в соответствии с

$$Z = X + iY = K e^{i\Theta} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\phi_k}. \quad (12.2)$$

Среднее поле имеет амплитуду K и фазу Θ :

$$K \cos \Theta = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos \phi_k, \quad K \sin \Theta = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin \phi_k. \quad (12.3)$$

Среднее поле является индикатором возникновения когерентности за счет синхронизации в ансамбле. Действительно, если все частоты различны, то в каждый момент времени фазы ϕ_k равномерно распределены в интервале $[0, 2\pi)$, и среднее поле не возникает. Наоборот, если некоторые осцилляторы в ансамбле синхронизируются на

¹ Мы опускаем нижний индекс у ω в аргументе распределения.

некой частоте, то их колебания складываются когерентным образом и возникает ненулевое среднее поле. Очевидна аналогия с ферромагнитным фазовым переходом, где среднее магнитное поле возникает благодаря корреляции в ориентации элементарных магнитных моментов (спинов). Следовательно, амплитуда среднего поля (12.2) может быть выбрана в качестве естественного параметра порядка при описании перехода к синхронизации.

Основная модель (12.1) может быть переписана в виде системы осцилляторов под воздействием среднего поля:

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \varepsilon K \sin(\Theta - \phi_k). \quad (12.4)$$

Очевидно, что нулевое среднее поле означает, что сила, действующая на каждый осциллятор, также равна нулю. Следовательно, некогерентное состояние всегда является решением системы (12.1). В этом случае каждый элемент ансамбля осциллирует на своей собственной частоте ω_k . В общем случае эти частоты различны, и, следовательно, фазы равномерно распределены на интервале $[0, 2\pi)$, и среднее поле равно нулю в соответствии с (12.2) и (12.3). Менее тривиально состояние с ненулевым средним полем. Если оно периодически ($K = \text{constant}$, $\Theta = \omega t$), то каждое из уравнений (12.4) эквивалентно фазовому уравнению осциллятора под воздействием периодической силы (уравнение (7.20)). Мы видим, что среднее поле действует на каждый осциллятор как внешняя сила, которая, в зависимости от параметров или может, или не может захватить его частоту.

Возникновение среднего поля может быть объяснено как самосогласованный процесс: ненулевое среднее поле захватывает, по крайней мере, некоторые осцилляторы, так что они становятся когерентными, и эта когерентная группа генерирует ненулевой вклад в среднее поле. Ниже мы изложим эти аргументы математически.

Естественно предположить, что из-за симметрии распределения $g(\omega)$, среднее поле будет осциллировать на центральной частоте $\bar{\omega}$ (в принципе, мы можем выбрать в начале произвольную частоту, а затем получить $\bar{\omega}$ из условия самосогласованности; учитывая же симметрию, мы просто предполагаем, что $\bar{\omega}$ есть частота среднего поля; впоследствии мы убедимся, что эта частота действительно является решением). Основная идея состоит в том, чтобы вывести условия самосогласованности, по аналогии с теорией фазовых переходов второго рода. Итак, подставим

$$\Theta = \bar{\omega}t, \quad K = \text{constant}, \quad \psi_k = \phi_k - \bar{\omega}t,$$

и получим

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \omega_k - \bar{\omega} - \varepsilon K \sin \psi_k. \quad (12.5)$$

Это уравнение совпадает с (7.24) и может иметь как синхронное, так и асинхронное решение.

(i) Синхронное решение

$$\psi_k = \sin^{-1} \frac{\omega_k - \bar{\omega}}{\varepsilon K} \quad (12.6)$$

существует при условии, что собственная частота k -го осциллятора близка к $\bar{\omega}$: $|\omega_k - \bar{\omega}| \leq \varepsilon K$. Соответствующие осцилляторы захвачены средним полем.

(ii) Асинхронное решение, при котором фаза ψ_k вращается в соответствии с уравнением (12.5), существует, если $|\omega_k - \bar{\omega}| > \varepsilon K$. В асинхронном состоянии фазы распределены неравномерно, что будет учтено в дальнейшем.

Следующий шаг состоит в том, чтобы найти вклад в среднее поле соответственно от групп синхронизованных и несинхронизованных элементов. Чтобы вычислить (12.3) в пределе $N \rightarrow \infty$, нам необходимо знать распределение разности фаз $n(\psi)$. В соответствии с двумя возможными решениями мы представим это распределение в виде суммы синхронной $n_s(\psi)$ и асинхронной $n_{as}(\psi)$ компонент.

Для осцилляторов, захваченных средним полем, разность фаз ψ не зависит от времени и определяется собственной частотой в соответствии с (12.6), так что распределение $n_s(\psi)$ может быть получено из распределения собственных частот

$$n_s(\psi) = g(\omega) \left| \frac{d\omega}{d\psi} \right| = \varepsilon K g(\bar{\omega} + \varepsilon K \sin \psi) \cos \psi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (12.7)$$

Для незахваченных средним полем осцилляторов разность фаз вращается, но для каждого ω_k мы можем получить распределение разности фаз непосредственно из уравнения (12.5). Так как разность фаз вращается неравномерно во времени, то вероятность наблюдать значение ψ обратно пропорциональна скорости вращения в этот момент $|\dot{\psi}|$. Таким образом, для данного ω_k распределение разности фаз

$$P(\psi, \omega) \sim \frac{1}{|\dot{\psi}|}.$$

Подставив сюда значение скорости из (12.5) и нормализовав, получим

$$\begin{aligned}
P(\psi, \omega) &= \left(|\omega - \bar{\omega} - \varepsilon K \sin \psi| \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{|\omega - \bar{\omega} - \varepsilon K \sin \psi|} \right)^{-1} \\
&= \frac{\sqrt{(\omega - \bar{\omega})^2 - \varepsilon^2 K^2}}{2\pi |\omega - \bar{\omega} - \varepsilon K \sin \psi|}. \tag{12.8}
\end{aligned}$$

Теперь нам необходимо усреднить по распределению $g(\omega)$, чтобы получить распределение разности фаз для асинхронных осцилляторов:

$$\begin{aligned}
n_{\text{as}}(\psi) &= \int_{|\omega - \bar{\omega}| > \varepsilon K} g(\omega) P(\psi, \omega) d\omega \\
&= \int_{\bar{\omega} + \varepsilon K}^{\infty} \frac{g(\omega) \sqrt{(\omega - \bar{\omega})^2 - \varepsilon^2 K^2}}{2\pi (\omega - \bar{\omega} - \varepsilon K \sin \psi)} d\omega \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\bar{\omega} - \varepsilon K} \frac{g(\omega) \sqrt{(\omega - \bar{\omega})^2 - \varepsilon^2 K^2}}{2\pi (-\omega + \bar{\omega} + \varepsilon K \sin \psi)} d\omega.
\end{aligned}$$

Обозначая $\omega - \bar{\omega} = x$ и используя симметрию распределения частот $g(\bar{\omega} + x) = g(\bar{\omega} - x)$, перепишем последнее выражение в более компактном виде

$$n_{\text{as}}(\psi) = \int_{\varepsilon K}^{\infty} \frac{g(\bar{\omega} + x) x \sqrt{x^2 - \varepsilon^2 K^2}}{\pi [x^2 - \varepsilon^2 K^2 \sin^2 \psi]} dx. \tag{12.9}$$

Теперь с помощью распределений n_s и n_{as} запишем самосогласованное уравнение для среднего поля

$$K e^{i\bar{\omega}t} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\psi + i\bar{\omega}t} [n_s(\psi) + n_{\text{as}}(\psi)] d\psi. \tag{12.10}$$

Отметим, прежде всего, что, в соответствии с (12.9), асинхронная компонента распределения $n_{\text{as}}(\psi)$ имеет период π по ψ , так что она не вносит вклад в интеграл (12.10). Таким образом, мы получаем два действительных уравнения (действительная и мнимая части (12.10)):

$$K = \varepsilon K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \psi \cdot g(\bar{\omega} + \varepsilon K \sin \psi) d\psi, \tag{12.11}$$

$$0 = \varepsilon K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi \sin \psi \cdot g(\bar{\omega} + \varepsilon K \sin \psi) d\psi. \tag{12.12}$$

Уравнение (12.12) определяет частоту, и мы видим, что $\bar{\omega}$ было правильным выбором: это уравнение удовлетворяется благодаря симметрии распределения частот. Остается уравнение (12.11), которое определяет амплитуду K среднего поля. Оно может быть решено аналитически только для некоторых видов распределения $g(\omega)$.

В качестве точно разрешимого примера рассмотрим распределение Лоренца

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi[(\omega - \bar{\omega})^2 + \gamma^2]}. \quad (12.13)$$

Для этого распределения интеграл в (12.11) может быть вычислен аналитически. После некоторых преобразований мы получаем амплитуду когерентного решения:

$$K = \sqrt{1 - \frac{2\gamma}{\varepsilon}}. \quad (12.14)$$

Нетривиальное среднее поле существует, если сила связи превышает критическое значение $\varepsilon_c = 2\gamma$. Переход к синхронизации напоминает фазовый переход второго рода и характеризуется критическим индексом $1/2$: $K \sim (\varepsilon - \varepsilon_c)^{1/2}$. Это также справедливо в общем случае распределения $g(\omega)$ с одним максимумом. Так как для малых K синхронизируются только осцилляторы с $\omega \cong \bar{\omega}$, то только локальные свойства функции g в окрестности максимума важны вблизи порога синхронизации. Из уравнения (12.11) можно увидеть, что для малых K только окрестность $\bar{\omega}$ вносит вклад в среднее поле. Таким образом, предполагая K малым и раскладывая $g(\bar{\omega} + \varepsilon K \sin \psi)$ в (12.11) в ряд Тейлора

$$g(\bar{\omega} + \varepsilon K \sin \psi) \approx g(\bar{\omega}) + \frac{g''}{2} \varepsilon^2 K^2 \sin^2 \psi,$$

получим после подстановки в (12.11)

$$\varepsilon_c = \frac{2}{\pi g(\bar{\omega})}, \quad K^2 \approx \frac{8g(\bar{\omega})}{|g''|\varepsilon^3} (\varepsilon - \varepsilon_c). \quad (12.15)$$

Переход к синхронизации в ансамбле осцилляторов проиллюстрирован результатами численного моделирования на рис. 12.1.

12.2 Осцилляторы с шумом

Теперь рассмотрим ансамбль идентичных осцилляторов в присутствии внешнего шума. Обычно считают, что силы, возмущающие каждый осциллятор, статистически независимы и имеют одинаковые распределения. Очевидно, что в таком ансамбле наблюдаемые частоты всех элементов равны, но, из-за шума, осцилляторы могут иметь совершенно разные фазы. Синхронизация означает наличие когерентности в ансамбле, что видно по ненулевому среднему полю.

Основная модель может быть записана в виде системы связанных уравнений Ланжевена со случайными силами $\xi_i(t)$:

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_k) + \xi_k(t). \quad (12.16)$$

Частоты всех осцилляторов равны, поэтому удобно ввести в рассмотрение фазы во вращающейся системе координат

$$\psi_k = \phi_k - \omega_0 t,$$

в результате чего получим

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\psi_j - \psi_k) + \xi_k(t). \quad (12.17)$$

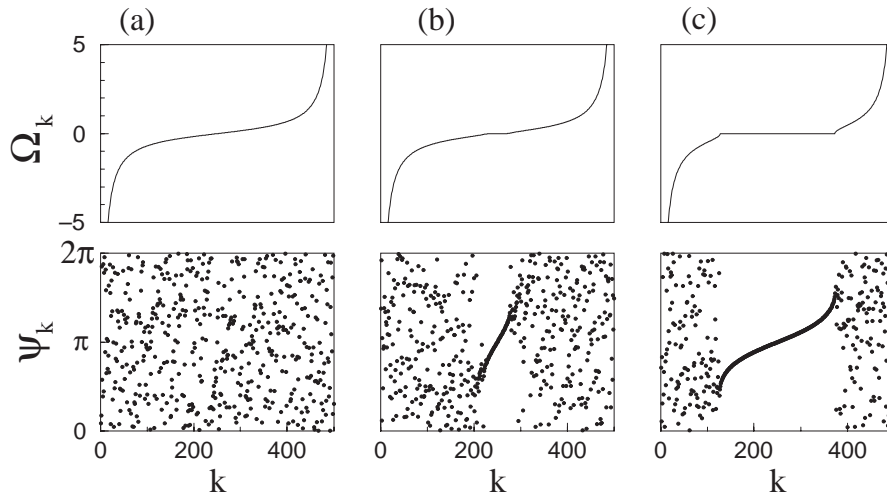


Рис. 12.1. Динамика ансамбля из 500 фазовых осцилляторов, описываемых уравнением (12.1). Собственные частоты имеют распределение Лоренца (12.13) с $\gamma = 0.5$ и $\bar{\omega} = 0$; критическое значение силы связи $\varepsilon_c = 1$. (а) Докритическая сила связи $\varepsilon = 0.7$. Осцилляторы не синхронизованы, среднее поле флуктуирует вокруг нуля (из-за конечности размера ансамбля). (б) Связь, близкая к критической $\varepsilon = 1.01$. Малая часть ансамбля (элементы, частоты которых близки к центральной частоте) синхронна. Наблюдаемые частоты $\Omega_k = \langle \dot{\phi}_k \rangle$ этих элементов одинаковы. (с) $\varepsilon = 1.2$, большая часть ансамбля синхронна, среднее поле велико. Амплитуда среднего поля $K \approx 0.1$ для (б) и $K \approx 0.41$ для (с), что находится в хорошем соответствии с формулой (12.14).

В дальнейшем предполагаем, что случайные члены имеют гауссовское распределение с нулевым средним, δ -коррелированы во времени и независимы для различных осцилляторов:

$$\langle \xi_n \rangle = 0, \quad \langle \xi_m(t) \xi_n(t') \rangle = 2\sigma^2 \delta(t - t') \delta_{mn}.$$

Опишем качественно возможные эффекты. Есть два фактора, влияющие на фазы. Шум стремится сделать распределение фаз в ансамбле равномерным, и тем самым уменьшает среднее поле. Взаимодействие приводит к притяжению фаз, т.е. к тенденции к образованию кластера, а следовательно и к появлению ненулевого среднего поля. При $\varepsilon/\sigma^2 \rightarrow 0$ влияние шума сильнее, и тенденция к отсутствию когерентности побеждает, в то время как при $\varepsilon/\sigma^2 \rightarrow \infty$ преобладает взаимодействие и значения фаз уравниваются. Можно ожидать, что при некотором критическом значении силы связи ε_c мы будем наблюдать переход к синхронизации.

По аналогии с (12.2) введем среднее поле

$$Z = X + iY = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\psi_k} \quad (12.18)$$

и перепишем систему (12.17) в виде

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \varepsilon(-X \sin \psi_k + Y \cos \psi_k) + \xi_k(t). \quad (12.19)$$

Цель теории – написать самосогласованное уравнение для распределения фаз. Предположим, что среднее поле Z есть медленная (по сравнению с шумом) функция времени, и, следовательно, в уравнении Ланжевена оно может рассматриваться в качестве детерминированного члена. Тогда (12.19) становится аналогичным ланжевенскому уравнению для отдельного осциллятора с шумом (см. (9.7)). Соответствующее уравнение Фоккера–Планка для плотности распределения фаз имеет вид

$$\frac{\partial P(\psi, t)}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \psi} [(X \sin \psi - Y \cos \psi) P] + \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2}. \quad (12.20)$$

Рассмотрим теперь термодинамический предел $N \rightarrow \infty$. В этом пределе усреднение по ансамблю (12.18) может быть заменено усреднением по распределению $P(\psi, t)$:

$$Z = X + iY = \int_0^{2\pi} d\psi P(\psi, t) e^{i\psi}. \quad (12.21)$$

Уравнения (12.20) и (12.21) представляют собой окончательную самосогласованную систему уравнений для неизвестной функции распределения и среднего поля. Отметим, что эта система нелинейна, т.к. члены X и Y в (12.20) зависят от $P(\psi, t)$ в соответствии с уравнением (12.21).

Чтобы проанализировать систему уравнений, разложим плотность P в ряд Фурье

$$P(\psi, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_l P_l(t) e^{il\psi}. \quad (12.22)$$

Отметим, что в соответствии с уравнением (12.21) среднее поле является комплексной амплитудой первой моды $Z = X + iY = P_1^* = P_{-1}$ и, вследствие нормализации, амплитуда нулевой моды равна единице, $P_0 = 1$. Подставляя (12.22) в (12.20) и разделяя Фурье-компоненты, получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dP_l}{dt} = -\sigma^2 l^2 P_l + \frac{l\varepsilon}{2} (P_{l-1} P_1 - P_{l+1} P_1^*). \quad (12.23)$$

Запишем первые три уравнения

$$\dot{P}_1 = \frac{\varepsilon}{2} (P_1 - P_2 P_1^*) - \sigma^2 P_1, \quad (12.24)$$

$$\dot{P}_2 = \varepsilon (P_1^2 - P_3 P_1^*) - 4\sigma^2 P_2, \quad (12.25)$$

$$\dot{P}_3 = \frac{3\varepsilon}{2} (P_2 P_1 - P_4 P_1^*) - 9\sigma^2 P_3. \quad (12.26)$$

Отметим, что равномерное распределение фаз, при котором все Фурье-моды (за исключением P_0) исчезают, является решением системы. Линеаризуя уравнения вокруг этого состояния, мы видим, что только первая мода является потенциально неустойчивой: она устойчива при $\varepsilon < 2\sigma^2$ и неустойчива, если $\varepsilon > 2\sigma^2$. Это в точности соответствует критическому значению силы связи, а неустойчивая мода — это и есть среднее поле, $P_1 = Z^*$. Чтобы получить стационарное решение за порогом неустойчивости, необходимо учесть нелинейные члены. Полезно отметить, что вблизи порога $\varepsilon \approx 2\sigma^2$ вторая мода затухает довольно быстро по сравнению с характерным временем неустойчивости (т.е. $|\varepsilon - 2\sigma^2| \ll \sigma^2$). Более того, мы можем оценить $|P_2| \sim |P_1|^2$ (из (12.25)) и $|P_3| \sim |P_1|^3$ (из (12.26)). Таким образом, подстановка $\dot{P}_2 \approx 0, P_3 \approx 0$ является хорошим приближением, которое позволяет выразить P_2 через P_1 алгебраически и получить

$$\dot{Z} = \left(\frac{\varepsilon}{2} - \sigma^2\right) Z - \frac{\varepsilon^2}{8\sigma^2} |Z|^2 Z. \quad (12.27)$$

Это уравнение нормальной формы для бифуркации Хопфа (в теории гидродинамической неустойчивости оно также называется уравнением Ландау-Стюарта) описывает возникновение макроскопического среднего поля в ансамбле связанных осцилляторов с шумом. Его стационарное решение есть

$$|Z|^2 = (\varepsilon - 2\sigma^2) \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2}. \quad (12.28)$$

Вблизи перехода среднее поле растет пропорционально квадратному корню из надкритичности. Это свойство ансамбля зашумленных осцилляторов еще раз иллюстрирует аналогию с теорией фазовых переходов. Фаза среднего поля может быть произвольной; в термодинамическом пределе она постоянна (во вращающейся системе координат).

12.3 Обобщения

Мы описали две основных причины отсутствия когерентности в большом ансамбле осцилляторов: распределение собственных частот и внешний шум. В последнее время большой интерес вызывают смежные проблемы, где, например, присутствуют оба этих фактора. В этом разделе мы даем обзор основных результатов.

12.3.1 Модели, основанные на фазовом приближении

Шум и распределение частот

Естественным обобщением моделей, описанных в разделах 12.1 и 12.2, является комбинация двух основных причин беспорядка: внешнего шума и распределения собственных частот, что приводит к модели:

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \xi_k(t) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_k). \quad (12.29)$$

Плотность распределения для одного осциллятора теперь зависит также и от частоты ω : $P(\phi, \omega, t)$. Среднее поле может быть определено путем осреднения по распределениям фаз и частот:

$$K e^{i\Theta} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\phi} P(\phi, \omega, t) g(\omega). \quad (12.30)$$

Среднее поле определяет динамику осциллятора, так что функция распределения подчиняется уравнению Фоккера-Планка

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \phi} [(\omega + \varepsilon K \sin(\Theta - \phi))P] + \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2}. \quad (12.31)$$

Система уравнений (12.30) и (12.31) дает самосогласованное описание проблемы. В общем случае, при малой связи ε некогерентное состояние $P(\phi, \omega) = 1/2\pi$, $K = 0$ устойчиво. При увеличении связи наблюдается переход к синхронному состоянию с ненулевым средним полем. Характер перехода зависит от конкретной формы функции распределения $g(\omega)$ – это может быть мягкая (закритическая) бифуркация, описанная в разделе 12.2, или жесткая (докритическая) (см. Vonilla *et al.* [1992]; Acebrón *et al.* [1998]).

Гистерезисный переход к синхронизации

Другое возможное обобщение состоит в рассмотрении инерционной фазовой динамики. При этом вместо (12.29) записывается система уравнений Ланжевена второго порядка для связанных ротаторов

$$m \frac{d^2 \phi_k}{dt^2} + \frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \xi_k(t) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_k). \quad (12.32)$$

Переход между асинхронным и синхронным состоянием демонстрирует в этом случае гистерезис [Tanaka *et al.* 1997a,b; Hong *et al.* 1999c]. Наличие гистерезиса непосредственно связано с бистабильностью одиночного ротатора при внешнем воздействии: в системе

$$m \frac{d^2 \Psi}{dt^2} + \frac{d\Psi}{dt} + a \sin \Psi = I$$

в определенном диапазоне крутящего момента I сосуществуют два устойчивых решения: вращение и состояние покоя.

Обобщенная функция связи: кластеры

В разделах 12.1 и 12.2 рассматривалась только простейшая притягивающая связь, пропорциональная синусу от разности фаз.² Здесь

² Связь, описываемая синусом, может быть также обобщена на случай некоторого предпочтительного сдвига фаз между осцилляторами; мы обсудим этот случай при рассмотрении связанных джозефсоновских контактов, см. ниже уравнение (12.43).

мы покажем, что более сложная форма связи может привести к дальнейшему усложнению коллективной динамики. Okuda [1993] показал, что, если связь между идентичными (т.е. имеющими одинаковые собственные частоты) фазовыми осцилляторами описывается некоей обобщенной функцией связи $q(\phi)$, то это может привести к образованию нескольких кластеров. У осцилляторов, формирующих кластер, фаза одна и та же; между различными кластерами существует постоянный сдвиг по фазе. Модель записывается в виде

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N q(\phi_j - \phi_k). \quad (12.33)$$

Если периодическая функция связи $q(\phi) = q(\phi + 2\pi)$ содержит высшие гармоники, то при некоторых начальных условиях может наблюдаться формирование кластеров (рис. 12.2).

Общий случай функции связи: функция порядка и шум

Даидо [Daido 1992a, 1993a, 1995, 1996] ввел концепцию функции порядка (order function) для описания осцилляторов типа (12.33) с

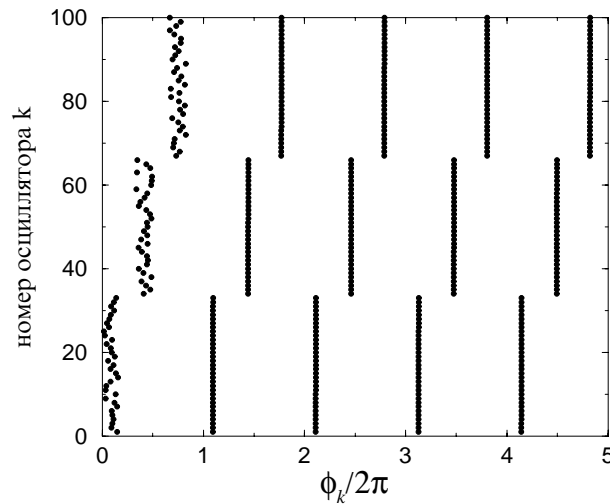


Рис. 12.2. Динамика ансамбля из 100 связанных осцилляторов, описываемых уравнением (12.33) с $q(\phi) = -c^{-1} \tan^{-1}[(c \sin \phi)/(1 - c \cos \phi)]$ для $c = -0.7$ и $\varepsilon = 1$. Ансамбль эволюционирует к состоянию с тремя кластерами, показанными стробоскопически в моменты времени $n2\pi/\omega_0$. Для того, чтобы система попала в это состояние, необходимо выбрать подходящие начальные условия. Система мультистабильна, и в ней могут наблюдаться различные синхронные режимы.

распределением собственных частот

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N q(\phi_j - \phi_k). \quad (12.34)$$

Функция связи q может быть в общем случае представлена рядом Фурье

$$q(\phi) = \sum_l q_l e^{i2\pi l \phi}.$$

Предполагая, что фазы всех синхронных осцилляторов вращаются с частотой $\bar{\omega}$, введем обобщенный параметр порядка

$$Z_l = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i2\pi l(\phi_k - \bar{\omega}t)}$$

и перепишем уравнения движения в виде

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k - \varepsilon H(\phi_k - \bar{\omega}t),$$

где

$$H(\psi) = - \sum_l q_l Z_l e^{-i2\pi l \psi}.$$

Функция H есть средняя сила, действующая на каждый осциллятор; она называется функцией порядка. Она является обобщением среднего поля, использованного Курамото в анализе его модели (12.1). Ненулевая функция порядка указывает на синхронизацию в ансамбле. Даидо показал аналитически, что вблизи порога синхронизации норма функции порядка пропорциональна бифуркационному параметру (а не корню квадратному из него, как в уравнении (12.15)):

$$\|H\| \sim \varepsilon - \varepsilon_c.$$

Этот результат показывает, что корневой закон (12.15), полученный Курамото для его модели (12.1) не справедлив в случае функции связи общего вида. Crawford [1995], включивший внешний шум в рассмотрение модели (12.34), пришел к такому же выводу. Его основной результат заключается в том, что амплитуда l -ой Фурье-моды P_l распределения, возникающего у порога синхронизации, имеет вид

$$|P_l| \sim \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_c)(\varepsilon - \varepsilon_c + l^2 \sigma^2)}.$$

Таким образом, в присутствии шума ($\sigma \neq 0$) амплитуды P_l , которые играют роль параметра порядка, растут пропорционально $\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_c}$, но при исчезающе малом шуме ($\sigma = 0$) растут медленнее, пропорционально $(\varepsilon - \varepsilon_c)$, в соответствии с результатами Даидо.

12.3.2 Глобально связанные слабонелинейные осцилляторы

Ансамбль глобально связанных слабонелинейных осцилляторов моделируется системой уравнений (ср. с (8.12) и (11.14))

$$\frac{dA_k}{dt} = (\mu + i\omega_k)A_k - (\gamma + i\alpha)|A_k|^2 A_k + \frac{\beta + i\delta}{N} \sum_{j=1}^N (A_j - A_k). \quad (12.35)$$

Простейший случай – это изохронные осцилляторы ($\alpha = 0$) с диссипативной связью ($\delta = 0$), что соответствует притяжению фаз. Переход к синхронизации в таком ансамбле аналогичен переходу в ансамбле фазовых осцилляторов (подробней см. в [Matthews and Strogatz 1990; Matthews *et al.* 1991]), поэтому здесь мы остановимся только на тех свойствах, которые не проявляются в фазовом приближении.

Гашение колебаний (вымирание)

Если константа связи β и ширина распределения собственных частот ω_k велики, то состояние с нулевой амплитудой $A_k = 0$ стабильно. Качественно это можно объяснить следующим образом. Раз распределение широкое, то частоты осцилляторов существенно различны и их влияние на другие осцилляторы относительно мало. С другой стороны, диффузионная связь в (12.35) вносит дополнительное затухание $\sim \beta A_k$, которое компенсирует возрастающий член μA_k и делает состояние $A_k = 0$ устойчивым (подробности см. в [Ermentrout 1990; Mirollo and Strogatz 1990a]).

Коллективный хаос

В некотором диапазоне параметров среднее поле $Z = N^{-1} \sum_1^N A_k$ демонстрирует иррегулярное во времени поведение. Matthews and Strogatz [1990] наблюдали это для диссипативно связанных изохронных осцилляторов с распределением собственных частот; позже в работах [Hakim and Rappel 1992] и [Nakagawa and Kuramoto 1993, 1995] была обнаружена и исследована хаотическая динамика среднего поля в ансамбле идентичных неизохронных осцилляторов с диссипативной и реактивной связью.

12.3.3 Связанные релаксационные осцилляторы

Ансамбли связанных релаксационных осцилляторов часто используются для моделирования поведения больших групп нейронов (см., например, [Hoppensteadt and Izhikevich 1997; Tass 1999]). Индивидуальный нейрон может рассматриваться как осциллятор накопление – сброс описанный в разделе 8.3; обычно один нейрон воздействует на множество других через синапсы. Часто используемая модель глобально связанных релаксационных осцилляторов была предложена Миролло и Строгатцем [Mirollo and Strogatz 1990b]; она является простым обобщением модели двух взаимодействующих систем накопление – сброс, рассмотренных в разделе 8.3.

Осцилляторы предполагаются идентичными. Каждый из них описывается переменной x_i , которая в режиме накопления подчиняется уравнению

$$\frac{dx_k}{dt} = S - \gamma x_k.$$

Когда осциллятор достигает порога $x_k = 1$, он стреляет: переменная x_k сбрасывается в ноль. При этом все остальные переменные x_j , $j \neq k$ мгновенно увеличиваются на величину ε/N и могут также достичь порога.³ Следовательно, некоторые осцилляторы могут выстрелить в один и тот же момент времени. Мы предполагаем, однако, что осциллятор в состоянии $x = 0$ (т.е. немедленно после сброса) не подвержен воздействию со стороны других, так что состояние $x = 0$ является абсорбирующим. Это свойство приводит к идеальной синхронизации: если два осциллятора стреляют в один и тот же момент времени, то в дальнейшем их поведение идентично. В общем случае нельзя исключить существования асинхронных состояний, но Миролло и Строгатц [Mirollo and Strogatz 1990b] доказали, что множество начальных условий, соответствующих асинхронным решениям, имеет нулевую меру. Таким образом, с вероятностью единица в популяции устанавливается режим с идеальным совпадением фаз, при котором все осцилляторы генерируют импульсы одновременно. Эти результаты справедливы для любого $N \geq 2$. Мы иллюстрируем переход от изначально случайного распределения фаз к идеальному захвату фаз в модели Миролло и Строгатца на рис. 12.3.

³ Мы опять нормализуем величину силы связи на число осцилляторов, чтобы получить разумный результат в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$.

12.3.4 Связанные контакты Джозефсона

Продemonстрируем, что цепочка последовательно соединенных идентичных контактов Джозефсона может рассматриваться как система глобально связанных ротаторов. Связь осуществляется параллельной нагрузкой, как показано на рис. 12.4.

Чтобы записать уравнения системы, напомним основные свойства контактов Джозефсона (см. раздел 7.4 и [Barone and Paterno 1982; Likharev 1991]). Каждый контакт характеризуется углом Ψ_k ; сверхпроводящий ток обозначен как $I_c \sin \Psi_k$, и напряжение на контакте как $V_k = \dot{\Psi} \hbar / 2e$. Ток через все контакты один и тот же, поэтому

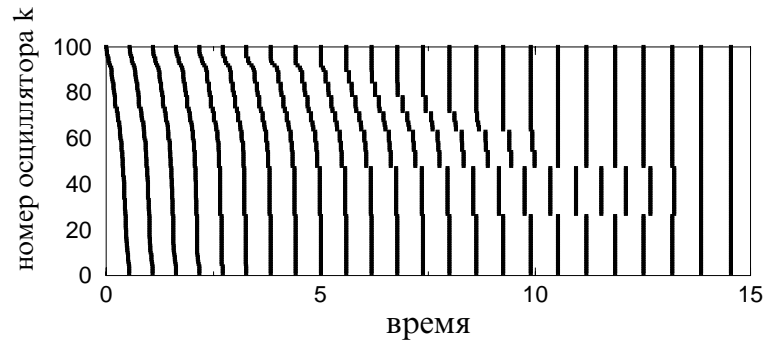


Рис. 12.3. Динамика популяции 100 связанных осцилляторов накопление – сброс. Модель описана в тексте, значения параметров выбраны $S = 2$, $\gamma = 1$, $\varepsilon = 0.2$. Моменты времени, когда осцилляторы стреляют, показаны точками. Для наглядности мы отсортировали набор переменных, так что множество точек выглядит как линия (пусть и ломаная). Можно увидеть, как происходит формирование кластеров из осцилляторов с близкими фазами.

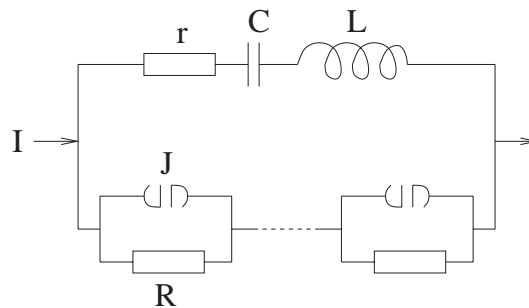


Рис. 12.4. Цепочка контактов Джозефсона J , связанных через параллельную RLC -нагрузку. Ёмкостью контактов пренебрегается, учитывается только сопротивление R , параллельное контакту; это соответствует модели резистивно шунтированного контакта Джозефсона.

можно записать

$$\frac{\hbar}{2eR} \frac{d\Psi_k}{dt} + I_c \sin \Psi_k = I - \frac{dQ}{dt}, \quad (12.36)$$

где \dot{Q} – это ток через параллельную RLC -нагрузку. Добавляя уравнение для нагрузки

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + r \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \frac{\hbar}{2e} \sum_{k=1}^N \frac{d\Psi_k}{dt}, \quad (12.37)$$

получаем полную систему уравнений движения. Одиночный контакт Джозефсона эквивалентен ротатору, и система уравнений (12.36) и (12.37) есть система уравнений глобально связанных ротаторов. Связь не возникает непосредственно в уравнении движения каждого ротатора, потому что «глобальная переменная» Q инерционна и описывается отдельным уравнением.

Продемонстрируем, следуя работе [Wiesenfeld and Swift 1995], что для малой связи система эквивалентна модели Курамото (раздел 12.1). Рассмотрим случай большого внешнего тока I . В этом случае среднее напряжение на всех контактах отлично от нуля (все ротаторы вращаются), и мы можем ввести фазу в соответствии с нашим определением, как переменную, соответствующую движению с постоянной скоростью по предельному циклу (см. раздел 7.1). Несвязанные ротаторы описываются уравнением (12.36) с $\dot{Q} = 0$, и преобразование к равномерно вращающейся фазе ϕ может быть записано в явном виде:

$$\phi_k = 2 \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{I - I_c}{I + I_c}} \tan \left(\frac{\Psi_k}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (12.38)$$

Вычисляя производную по времени от ϕ_k с помощью уравнения (12.36) и используя тождество

$$I - I_c \sin \Psi = (I^2 - I_c^2) / (I - I_c \cos \phi), \quad (12.39)$$

которое следует из (12.38), мы получаем уравнение для фазы

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_0 - \dot{Q} \frac{\omega_0 (I - I_c \cos \phi_k)}{I^2 - I_c^2}. \quad (12.40)$$

Здесь ω_0 – это частота автономных вращений $2eR\sqrt{I^2 - I_c^2}/\hbar$.

Пока мы не сделали никаких приближений и уравнение (12.40) является точным. Используем теперь метод усреднения аналогично тому, как описано в разделах 7.1 и 8.1. В нулевом приближении

все фазы ϕ_k вращаются с одинаковой частотой ω_0 : $\phi_k = \omega_0 t + \phi_k^0$. RLC -нагрузка линейна, поэтому вклады Q_k от различных контактов в уравнение (12.37) можно рассматривать отдельно. Каждый контакт действует на нагрузку как периодическая сила, которая, правда, не синусоидальна, а имеет более сложную форму, так как угловая переменная Ψ получена из линейно вращающихся фаз ϕ с помощью нелинейного преобразования (12.38). Таким образом, сила в уравнении (12.37) имеет много гармоник, и отклик линейной нагрузки может быть получен из уравнения (12.37) для каждой из них:

$$Q_k = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{kn} \cos(n\phi_k - \beta_n). \quad (12.41)$$

Рассмотрим основную компоненту $n = 1$. Уравнение движения для Q_{k1} получается после подстановки $d\Psi/dt$ в (12.37) в соответствии с (12.36) и выражения $\sin \Psi$ через ϕ с помощью уравнения (12.39):

$$\begin{aligned} L\ddot{Q}_{k1} + (r + NR)\dot{Q}_{k1} + \frac{Q_{k1}}{C} &= \left\langle \left\langle R \frac{I^2 - I_c^2}{I - I_c \cos(\omega_0 t + \phi_k^0)} \right\rangle \right\rangle \\ &= RI_c^{-1}(I^2 - I_c^2 - I\sqrt{I^2 - I_c^2}) \cos(\omega_0 t + \phi_k^0). \end{aligned} \quad (12.42)$$

Здесь $\langle \langle \cdot \rangle \rangle$ означает взятие первой гармоники периодической функции. Решение линейного уравнения (12.42) есть

$$Q_{k1} = R \frac{I^2 - I_c^2 - I\sqrt{I^2 - I_c^2}}{I_c \sqrt{(1/C - L\omega_0^2)^2 + (r + NR)^2 \omega_0^2}} \cos(\omega_0 t + \alpha + \phi_k^0),$$

где

$$\cos \alpha = \frac{L\omega_0^2 - 1/C}{\sqrt{(1/C - L\omega_0^2)^2 + (r + NR)^2 \omega_0^2}}.$$

Теперь мы можем подставить это решение в (12.40) и осреднить по периоду быстрых вращений $2\pi/\omega_0$. Предположим также, что фазы ϕ_k^0 являются медленными функциями времени. Легко видеть, что высшие гармоники $n > 1$ не вносят вклад в усредненное уравнение. В результате, мы получаем

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_k - \alpha), \quad (12.43)$$

где

$$\varepsilon = N \frac{2\varepsilon R^2 I \omega_0 / \hbar - R \omega_0^2}{\sqrt{(1/C - L \omega_0^2)^2 + (r + NR)^2 \omega_0^2}}.$$

Полученные уравнения совпадают с фазовой моделью Курамото (12.1). Единственная разница заключается в том, что взаимодействие имеет несколько более общий вид. Угол α в члене, описывающем взаимодействие, зависит от свойств нагрузки. Если $\alpha = 0$, то взаимодействие между контактами притягивающее, в то время как для $\alpha \neq 0$ каждая пара контактов «предпочитает» иметь определенный фазовый сдвиг. Тем не менее, даже для $\alpha \neq 0$ мы можем искать синфазное решение $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_N$. Это решение имеет частоту, отличную от ω_0 , и устойчиво, если $\varepsilon \cos \alpha > 0$ (линеаризация (12.43) приводит к простой матрице с одним нулевым собственным значением и $N - 1$ собственными значениями $\varepsilon \cos \alpha$). В случае неустойчивости синфазного состояния возникает другой режим, при котором фазы равномерно распределены, т.е. $\phi_k^0 = 2\pi k/N$. Это так называемое расплывшееся состояние с нейтральной устойчивостью (splay state, подробнее см. [Strogatz and Mirollo 1993; Watanabe and Strogatz 1993, 1994]).

Если учесть малый беспорядок в цепочке контактов Джозефсона (например, из-за распределения критических токов I_c), то получается ансамбль с различными собственными частотами. Синхронизация таких контактов Джозефсона может быть описана как особый пример перехода Курамото при конечной константе связи ε [Wiesenfeld *et al.* 1996].

12.3.5 Эффекты конечности числа элементов ансамбля

Переход к синхронизации в ансамбле осцилляторов должен быть резким в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$. Для ансамбля с конечным числом элементов наблюдаются эффекты, аналогичные известным в статистической механике [Cardy 1988]. Основная идея состоит в том, что конечность числа элементов ансамбля приводит к флуктуациям среднего поля имеющим порядок $\sim N^{-1/2}$. Так, например, Pikovsky and Ruffo [1999] предложили описывать ансамбли с конечным числом возмущенных шумом осцилляторов уравнением (12.27) с дополнительным флуктуационным членом:

$$\dot{Z} = \left(\frac{\varepsilon}{2} - \sigma^2\right)Z - \frac{\varepsilon^2}{8\sigma^2}|Z|^2Z + \eta_1(t) + i\eta_2(t), \tag{12.44}$$

$$\langle \eta_i(t)\eta_j(t') \rangle = \frac{2d^2}{N}\delta_{ij}\delta(t-t').$$

Шумовой член пропорционален $1/\sqrt{N}$ и исчезает в термодинамическом пределе. Его влияние на динамику среднего поля может быть легко понято, если интерпретировать (12.44) как уравнение для слабонелинейной автоколебательной системы с шумом (см., например, [Стратонович 1963]). На фазовой плоскости $X = \text{Re}(Z)$, $Y = \text{Im}(Z)$ мы получаем размытый предельный цикл, а амплитуда и фаза среднего поля флуктуируют, см. рис. 12.5.

12.3.6 Ансамбль хаотических осцилляторов

Фазовая динамика хаотических осцилляторов может быть похожа на динамику периодических осцилляторов в присутствии шума (см. главу 10). Соответственно, синхронизация в ансамбле глобально связанных хаотических осцилляторов сходна с возникновением когерентности в ансамбле осцилляторов с шумом, описанной в разделах 12.2 и 12.3.

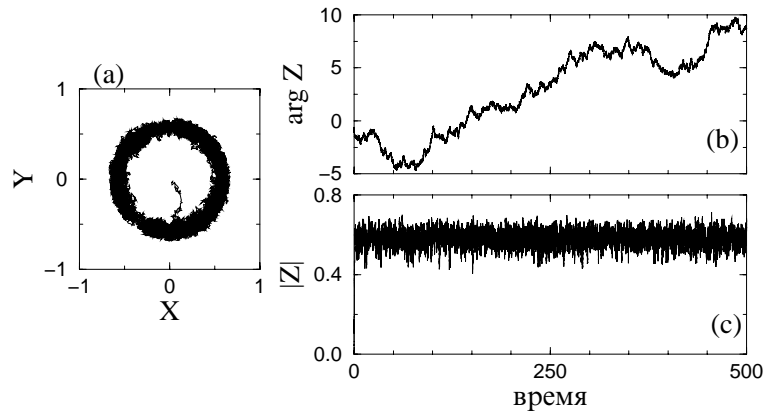


Рис. 12.5. Эволюция среднего поля $Z = X + iY$ в системе из 500 зашумленных фазовых осцилляторов (см. уравнение (12.16)). (a) Фазовый портрет в координатах (X, Y) : после переходного процесса траектории заполняют кольцо, ширина которого пропорциональна $N^{-1/2}$. (b,c) Зависимость фазы и амплитуды среднего поля от времени $Z(t)$. Из Pikovsky and Ruffo, *Physical Review E*, Vol. 59, 1999, pp. 1633–1636. Copyright 1999 by the American Physical Society.

В качестве примера мы приводим здесь результаты численного моделирования ансамбля глобально связанных *идентичных* осцилляторов Рёсслера [Pikovsky *et al.* 1996]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_k &= -y_k - z_k + \varepsilon X, \\ \dot{y}_k &= x_k + ay_k, \\ \dot{z}_k &= 0.4 + z_k(x_k - 8.5).\end{aligned}\tag{12.45}$$

Связь осуществляется через среднее поле

$$X = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k, \quad Y = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k.\tag{12.46}$$

Среднее поле исчезает в асинхронном режиме и демонстрирует довольно регулярные колебания после перехода к синхронизации, который в данной системе происходит при $\varepsilon \approx 0.025$. Интересно, что в синхронном режиме каждый осциллятор в ансамбле остается хаотическим; когерентность возникает только за счет синхронизации по фазам. Мы иллюстрируем это на рис. 12.6, где показаны фазовый портрет одного из элементов ансамбля и среднее поле. Амплитуда среднего поля относительно мала, но определенно больше флуктуации за счет конечности числа осцилляторов (эти флуктуации, по-видимому, являются причиной модуляции среднего поля).

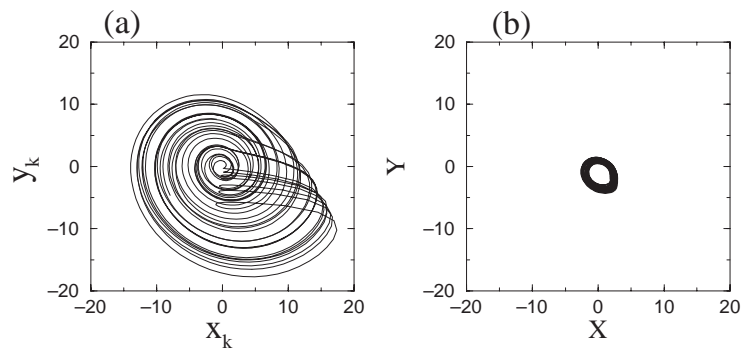


Рис. 12.6. Проекция фазового портрета одного из осцилляторов (a) и среднего поля (12.46) (b) в ансамбле (12.45) с $a = 0.25$. Отметим, что для данного значения параметров система Рёсслера имеет так называемый аттрактор-воронку, см. также рис. 10.4. Флуктуации среднего поля, по-видимому, являются результатом конечности числа осцилляторов в ансамбле, $N = 10\,000$.

Неидентичные хаотические осцилляторы также могут синхронизоваться. Различные собственные частоты могут быть введены в модель (12.45) с помощью дополнительного параметра, определяющего временной масштаб вращения:

$$\begin{aligned}\dot{x}_k &= -\omega_k y_k - z_k + \varepsilon X, \\ \dot{y}_k &= \omega_k x_k + a y_k, \\ \dot{z}_k &= 0.4 + z_k(x_k - 8.5).\end{aligned}\tag{12.47}$$

Эта модель аналогична уравнению (12.29), потому что в ней присутствуют как распределение собственных частот ω_k , так и шум, который является результатом собственной хаотической динамики. Переход к синхронизации в системе (12.47) проиллюстрирован на рис. 12.7. Вычисление наблюдаемых частот Ω_k показывает, что при $\varepsilon = 0.1$ большинство осцилляторов взаимно синхронизованы. В дополнение, мы изображаем на графике значения максимумов перемен-

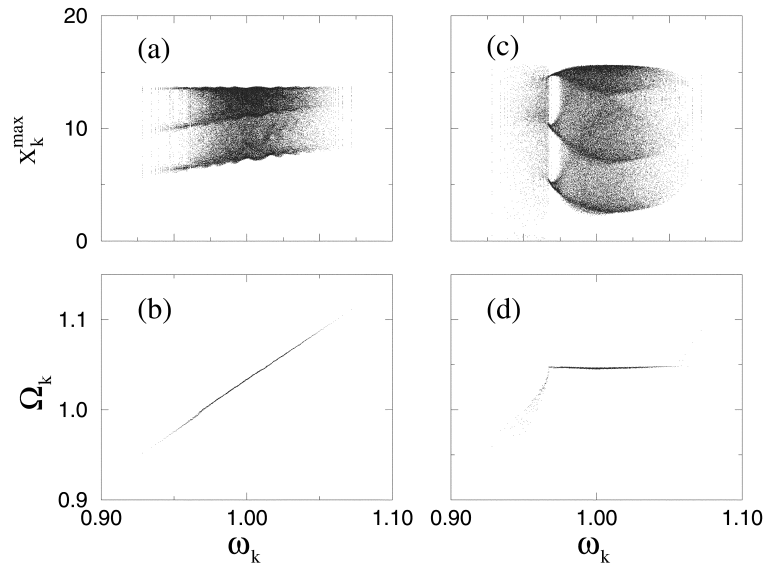


Рис. 12.7. Максимумы x_k^{\max} и наблюдаемые частоты Ω_k как функции собственных частот ω_k в ансамбле из 5000 связанных систем Рёсслера 12.47 с $a = 0.15$. Собственные частоты распределены по гауссовому закону со среднеквадратичным $\Delta\omega = 0.02$. (a, b) Связь $\varepsilon = 0.05$ немного ниже пороговой. Среднее поле близко к нулю и наблюдаемые частоты совпадают с собственными. (c, d) Выше порога ($\varepsilon = 0.1$) большинство осцилляторов находятся в когерентном состоянии (плато в (d)), в то время как амплитуды остаются хаотическими (за исключением окна периода три при $\omega \approx 0.97$). Из [Pikovsky *et al.* 1996].

ной x_k для каждого осциллятора. Эти максимумы имеют широкое распределение как ниже, так и выше порога синхронизации. Это означает, что колебания осцилляторов остаются хаотическими, хотя они и синхронизованы по фазам.

12.4 Библиографические заметки

Изучение больших ансамблей осцилляторов имеет относительно короткую историю: они стали популярными только с появлением достаточно мощных компьютеров. Среди ранних работ отметим работу Винфри [Winfree 1967], который также привел обзор соответствующих биологических наблюдений, а также работу [Pavlidis 1969]. Начиная с работ Курамото [Kuramoto 1975, 1984], который ввел и решил уравнения фазовой модели, описанной в разделе 12.1, эта проблема вызвала широкий интерес. Различные математические подходы были развиты в [Strogatz *et al.* 1992; van Hemmen and Wreszinski 1993; Watanabe and Strogatz 1993, 1994; Acebrón *et al.* 1998]. Okuda [1993]; Daido [1992a, 1993b,a, 1995, 1996]; Crawford [1995]; Crawford and Davies [1999]; Strogatz [2000]; Balmforth and Sassi [2000] рассмотрели обобщенную функцию связи. Ансамбли фазовых осцилляторов с шумом изучались в [Strogatz and Mirollo 1991; Bonilla *et al.* 1992, 1998; Hansel *et al.* 1993; Crawford 1994; Stange 1998, 1999; Hong *et al.* 1999a; Reimann *et al.* 1999]. Фазовый сдвиг в функции связи, или, что почти эквивалентно, запаздывание могут существенно изменить динамику, как обсуждалось в [Sakaguchi and Kuramoto 1986; Christiansen *et al.* 1992; Yeung and Strogatz 1999; S. H. Park *et al.* 1999a; Reddy *et al.* 1999; Choi *et al.* 2000]. Случайные фазовые сдвиги в связи могут привести к стекловидным состояниям (т.е. состояниям с очень многими устойчивыми конфигурациями) [Daido 1992b; Bonilla *et al.* 1993; Park *et al.* 1998]. Hoppensteadt and Izhikevich [1999] показали, что система Курамото под воздействием квазипериодической мультипликативной силы может действовать как нейронная сеть. Фазовые осцилляторы с инерцией демонстрируют переход первого порядка с гистерезисом [Tanaka *et al.* 1997a,b; Hong *et al.* 1999c,b]. Эффекты конечности числа элементов ансамбля описаны в [Dawson and Gärtner 1987; Daido 1990; Pikovsky and Ruffo 1999].

Глобально связанные контакты Джозефсона (или, что эквивалентно, ротаторы) как в отсутствие, так и при наличии шума рассматривались в [Shinomoto and Kuramoto 1986; Sakaguchi *et al.* 1988b; Strogatz *et al.* 1989; Golomb *et al.* 1992; Wiesenfeld *et al.* 1996; Tsang

et al. 1991b; Wiesenfeld 1992]. В частности, широкий интерес вызвали расплывшиеся режимы в такой системе [Tsang *et al.* 1991a; Nichols and Wiesenfeld 1992; Swift *et al.* 1992; Strogatz and Mirollo 1993].

Ансамбли слабонелинейных осцилляторов изучались в [Yamaguchi and Shimizu 1984; Bonilla *et al.* 1987; Mirollo and Strogatz 1990a; Matthews and Strogatz 1990; Matthews *et al.* 1991]. Некоторые эффекты в такой системе, например коллективный хаос [Hakim and Rappel 1992; Nakagawa and Kuramoto 1993, 1994, 1995; Banaji and Glendinning 1994] и вымирание колебаний [Ermentrout 1990] не наблюдаются для фазовых осцилляторов. Близки к этим работам исследования связанных мод в лазерах [Winful and Rahman 1990].

Релаксационные осцилляторы демонстрируют множество разнообразных эффектов [Kuramoto *et al.* 1992; Abbott and van Vreeswijk 1993; Tsodyks *et al.* 1993; Wang *et al.* 1993; Chen 1994; Bottani 1995, 1996; Ernst *et al.* 1995, 1998; Gerstner 1995; Rappel and Karma 1996; van Vreeswijk 1996; Kirk and Stone 1997; Bressloff and Coombes 1999; Wang *et al.* 2000b]. В заключение отметим, что в [Rogers and Wille 1996] изучались решетки осцилляторов с дальнедействующей связью; в этом случае можно плавно изменять связь от локальной до глобальной.